

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Laboratoire de Physique

THÈSE

de

Docteur de l'École Normale Supérieure de Lyon

spécialité : Physique

au titre de l'école doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 3 Novembre 2005

Romain VOLK

Fluctuations d'induction en magnétohydrodynamique, contributions à l'induction à grande échelle, application à l'effet dynamo

Directeurs de thèse : Monsieur Philippe ODIER
Monsieur Jean-François PINTON

Après avis de : Madame Bérengère DUBRULLE, Rapporteuse
Monsieur Philippe CARDIN, Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée de :

Madame Bérengère DUBRULLE
Monsieur Philippe CARDIN
Monsieur Alain NOULLEZ, Président
Monsieur Philippe ODIER
Monsieur Franck PLUNIAN
Monsieur Jean-François PINTON

Monsieur Peter FRICK, Invité
Monsieur Frank STEFANI, Invité

Table des matières

Première partie : Introduction générale et contexte expérimental.	9
I. Introduction	9
I.1 L'origine du champ magnétique terrestre	9
I.2 L'effet dynamo	10
I.3 La génératrice auto-excitée	11
I.4 Observations de l'effet dynamo	15
I.4.1 Une genèse difficile	15
I.4.2 Les dynamos fluides	16
I.4.3 Les expériences de seconde génération	18
I.5 Chronologie de la thèse et questions abordées	21
II. La magnétohydrodynamique et le problème de la dynamo	23
II.1 Des équations de Maxwell à l'équation de l'induction	23
II.1.1 Rappels d'électromagnétisme	23
II.1.2 L'équation d'induction	25
II.1.3 Interprétation, analogie et limites	26
II.1.4 Le nombre de Reynolds magnétique	27
II.2 Le problème de la dynamo	28
II.2.1 Position du problème	28
II.2.2 La dynamo cinématique	29
II.2.3 Théorèmes anti dynamo	30
II.2.4 Ingrédients importants	30
II.3 Les expériences d'induction	31
II.3.1 Cadre d'étude	31
II.3.2 L'approche mécaniste perturbative à bas R_m	32
II.3.3 Cas des grands R_m	34
II.4 Méthode numérique itérative	35
II.4.1 Algorithme et implémentation	35
II.4.2 Recherche d'un bouclage et lien avec la dynamo cinématique	37
III. Dispositifs expérimentaux	39
III.1 L'écoulement expérimental de von Kármán	39
III.1.1 Propriétés de l'écoulement moyen	39
III.1.2 Propriétés turbulentes de l'écoulement de von Kármán	44
III.1.3 Conclusion sur les propriétés des écoulements de von Kármán	47
III.2 Les expériences d'induction de von Kármán	47
III.2.1 Description générale	47
III.2.2 Mesures du champ magnétique	50

III.2.3 Paramètres de contrôle	53
III.2.4 Régime de fonctionnement des deux dispositifs	54
III.3 Expérience du tore de Perm	55
III.3.1 Mesures expérimentales	57
III.3.2 Caractéristiques de l'écoulement	58
III.4 Conclusions.	63

Seconde partie : Études expérimentales de la dynamique du champ magnétique induit. 67

IV. Induction moyenne dans les écoulements de gallium	67
IV.1 Mécanismes d'induction dans l'expérience VKG	68
IV.1.1 Dispositif expérimental	68
IV.1.2 Champ axial appliqué : écoulement contrarotatif	69
IV.1.3 Champ transverse appliqué	71
IV.1.4 Conclusion des mesures d'induction moyenne dans VKG	81
IV.2 Induction aux grandes échelles dans l'expérience au gallium de Perm	82
IV.2.1 Configuration de champ transverse	82
IV.2.2 Rappels et symétries	83
IV.2.3 Mesures dans le référentiel du laboratoire	84
IV.2.4 Mesures dans le référentiel tournant	90
IV.2.5 Conclusion sur les mesures d'induction moyenne dans le tore.	96
V. Induction et mouvements à petite échelle	99
V.1 Motivations	99
V.1.1 Champ moyen et fluctuations	100
V.1.2 Ordres de grandeur	101
V.1.3 Modélisation par la théorie de champ moyen	101
V.1.4 Stratégie expérimentale	103
V.2 Induction aux petites échelles dans VKG	104
V.2.1 Mécanismes d'induction en champ toroïdal appliqué	104
V.2.2 Configuration de champ toroïdal dans l'expérience VKG	105
V.2.3 Mesures de l'induction axiale en champ toroïdal appliqué	106
V.2.4 Conclusions sur l'effet coopératifs des fluctuations turbulentes dans VKG	109
V.3 Induction aux petites échelles dans l'expérience du tore	109
V.3.1 Configuration de champ toroïdal	109
V.3.2 Effets attendus	112
V.3.3 Résultats expérimentaux	112
V.3.4 Borne supérieure pour l'effet α	115
V.4 Conclusion de l'étude	116
VI. Fluctuations du champ magnétique à grande échelle	117
VI.1 Observations qualitatives	117
VI.2 Mesure des profils d'induction	119
VI.3 Étude statistique en un point	121
VI.4 Fluctuations des profils	127

VI.4.1	Notion de profil	127
VI.4.2	Définition des profils par ajustement polynomial	131
VI.4.3	Fluctuations de a_0 et a_1	134
VI.4.4	Oscillations basses fréquences	139
VI.5	Conclusion de l'étude des profils d'induction	140
VII.	Induction aux grands R_m : l'expérience VKS2	143
VII.1	Description de l'ensemble du dispositif	143
VII.2	Mesures en configuration VKS2a	146
VII.2.1	Configuration expérimentale	146
VII.2.2	Résultats pour l'induction moyenne	146
VII.2.3	Fluctuations du champ magnétique induit	149
VII.2.4	Conclusion des mesures faites en configuration VKS2a	152
VII.3	Mesures en configuration VKS2b	153
VII.3.1	Effet d'un champ transverse homogène	154
VII.3.2	Effet d'un champ localisé	155
VII.4	Bilan des mesures dans le sodium	158
 Troisième partie : Étude numérique de l'effet dynamo dans un écoulement structuré en colonnes.		163
VIII.	Mécanismes d'induction dans un écoulement structuré en colonnes .	163
VIII.1	Motivations	163
VIII.2	Écoulement modèle	166
VIII.3	Mécanismes d'induction pour l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$	169
VIII.3.1	Champ toroïdal appliqué	169
VIII.3.2	Champ radial appliqué	180
VIII.3.3	Cas du champ axial	191
VIII.4	Conclusion sur les mécanismes d'induction	195
IX.	Analyse dynamo pour les écoulements $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{T}1$	197
IX.1	Mécanisme dynamo pour l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$	197
IX.1.1	Mode dipolaire	199
IX.1.2	Mode quadrupolaire	202
IX.1.3	Mode dipolaire transverse	205
IX.2	Mécanisme dynamo pour l'écoulement $\mathbf{T}1$	207
IX.2.1	Analyse qualitative	207
IX.2.2	Bouclage des modes axisymétriques	208
IX.2.3	Bouclage du mode $m = 1$	210
IX.3	Évolution en fonction de la vitesse	210
IX.4	Lien avec le "first order smoothing"	215
IX.4.1	Retour sur la méthode	216
IX.4.2	Au delà de l'approximation d'ordre 2	217
IX.4.3	Application à l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$	218
IX.5	Conclusion	220

Annexe : effet dynamo dans l'écoulement de Roberts.	223
L'écoulement de Roberts.	223
L'approche de champ moyen.	224
Détermination du seuil d'apparition de l'instabilité dynamo.	225
 Quatrième partie : Conclusion	 229
X. Conclusion générale	229
 Bibliographie	 231

Première partie : Introduction générale et contexte expérimental

Chapitre I

Introduction

I.1 L'origine du champ magnétique terrestre

La Terre possède un champ magnétique propre qui permet à une petite aiguille aimantée d'indiquer le Nord. Cette observation, qui date de plus de 2000 ans, soulève naturellement la question de l'origine du champ terrestre. On sait depuis les travaux de Gauss (1835) que le champ magnétique de la Terre possède une structure dipolaire majoritairement axisymétrique (figure I.1) et qu'il fait un angle d'une dizaine de degrés par rapport à l'axe de rotation de la Terre. En décomposant le champ en harmoniques sphériques, il a montré que la source de ce champ magnétique dipolaire était nécessairement située à l'intérieur de la Terre.

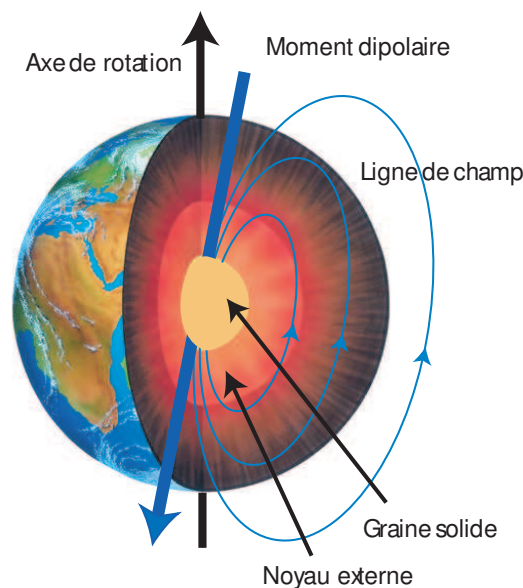


Fig. I.1: Schéma représentant la structure interne de la terre et son champ magnétique dipolaire.

On a dès lors expliqué la présence du champ magnétique par l'existence d'un gigantesque aimant placé au centre de la Terre. Toutefois, cette hypothèse ne résiste pas aux observations qui montrent que la température à l'intérieur de la Terre augmente avec la profondeur pour atteindre, au-delà de quelques dizaines de kilomètres, des valeurs pour lesquelles aucun corps ferromagnétique connu ne montre la capacité de rester aimanté. Puisque le dipôle ne peut être d'origine ferromagnétique, il nous faut donc supposer qu'il existe un courant électrique qui forme une boucle au centre de la Terre. Une telle circulation est rendue possible par le caractère métallique du noyau terrestre, qui est essentiellement formé

d'une graine de fer solide entourée par une couche de fer en fusion (le noyau externe). On pourrait alors être tenté d'imaginer que le champ magnétique résulte de l'existence d'un courant électrique fossile qui remonterait aux origines de la Terre. Cette conclusion s'avère toutefois erronée car en l'absence de source, la durée de vie τ d'un tel courant électrique serait limitée par la dissipation Joule. Notant $R \sim 1000$ km le rayon du noyau, $\mu \sim \mu_0$ la perméabilité magnétique du fer à 1000°C , et $\sigma \sim 4.5 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$ sa conductivité, on trouve que les courants électriques doivent disparaître au bout d'un temps :

$$\tau = \mu\sigma R^2 \sim 60000 \text{ ans.} \quad (\text{I.1})$$

Or des mesures d'aimantation des roches basaltiques du fond des océans attestent que le champ magnétique est présent depuis plus de 3.5 milliards d'années, et qu'il varie au cours du temps. Il fluctue tant en direction qu'en intensité, et il lui arrive même de s'atténuer fortement avant de se renverser [105]. Ces inversions des pôles Nord et Sud, qui se produisent de manière aléatoire sur des durées brèves (de l'ordre de 2000 ans), comparées aux échelles de temps géologiques, mènent à penser que la source interne, qui produit les courants électriques dans la masse de fer du noyau terrestre, possède une dynamique complexe et rapide comparée à l'échelle des temps géologiques.

I.2 L'effet dynamo

On savait déjà au XIX^e siècle qu'un métal en mouvement dans un champ magnétique était le siège de courants électriques induits, et l'on avait appliqué ce principe à la réalisation de machines dynamo-électriques servant à produire de l'électricité (voir section suivante). C'est à Larmor (1919) que revient le mérite d'avoir transposé ce principe au cas du mouvement d'un métal liquide pour expliquer l'existence du champ magnétique du soleil [52]. Cette explication fait appel à un mécanisme d'instabilité que l'on nomme "effet dynamo", et qui peut se résumer comme suit : considérons un métal liquide de conductivité σ , contenu dans un cube de volume $\mathcal{V} = L^3$, qui est en mouvement avec une vitesse \vec{V} . Si un champ magnétique \vec{B}_0 est présent, il apparaît une force électromotrice $\vec{e}_1 = \vec{V} \times \vec{B}_0$ qui produit un courant électrique $\vec{J}_1 \sim \sigma \vec{V} \times \vec{B}_0$. Celui-ci est alors source d'un champ magnétique induit \vec{B}_1 tel qu'on ait $\vec{\nabla} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \sigma \vec{J}_1$. L'amplitude de \vec{B}_1 est alors de l'ordre de $B_1 \sim \mu_0 \sigma V L B_0$. Imaginons que \vec{V} et \vec{B}_0 soient arrangés de telle manière que \vec{B}_1 soit parallèle à \vec{B}_0 . L'effet produit se superpose alors constructivement au champ appliqué, et si le coefficient d'amplification $R_m = \mu_0 \sigma V L$, appelé nombre de Reynolds magnétique, est suffisamment grand, alors le champ induit \vec{B}_1 est plus grand que \vec{B}_0 . A son tour \vec{B}_1 va donner naissance à un champ \vec{B}_2 encore plus grand, qui va donner naissance à un champ \vec{B}_3 , et ainsi de suite. Le système est alors instable, et un champ magnétique \vec{B} se met à croître jusqu'à ce que son amplitude soit suffisamment grande pour que la force de Laplace $\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B}$ freine le mouvement. C'est l'effet dynamo, qui assure une conversion d'une partie de l'énergie cinétique du mouvement en énergie magnétique.

Transposé au cas de la terre, il est communément admis que ce sont les mouvements de convection du fer liquide dans le noyau externe qui entretiennent le champ magnétique dipolaire. En effet, lorsqu'on utilise l'échelle de taille du noyau $L = 1000$ km, la conductivité de fer $\sigma \sim 4.5 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, et une estimation de la vitesse du fer liquide dans le noyau

$V \sim 0.1 \text{ mm.s}^{-1}$ [46], on trouve que le nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0 \sigma R V$ est de l'ordre de 50, valeur que l'on estime suffisante pour produire un champ magnétique par effet dynamo. La question qui se pose alors est celle de savoir comment doit être organisé l'écoulement pour pouvoir entretenir un champ magnétique dont le moment dipolaire est aligné avec l'axe de rotation, et quels sont les mécanismes physiques mis en jeu. Au chapitre VIII, nous étudierons numériquement la possibilité d'obtenir l'instabilité dynamo dans un écoulement qui modélise les mouvements de convection dans le noyau sous la forme d'un ensemble d'écoulements hélicoïdaux organisés le long d'un anneau.

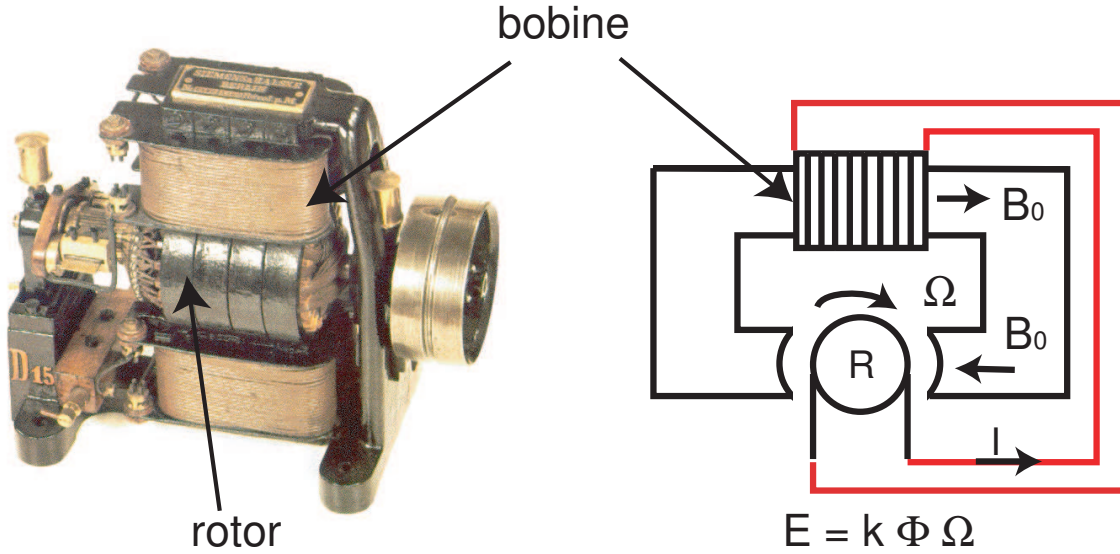
Remarque 1 : la description que nous avons faite de l'instabilité dynamo, pour laquelle le champ magnétique croît à partir d'une perturbation infiniment faible n'est pertinente que pour la description des dynamos dites "à champ faible" pour lesquelles l'instabilité est supercritique (c'est le cas des dynamos expérimentales construites jusqu'à présent). Elle ne peut donc pas décrire correctement la géodynamo dont on pense qu'elle est une dynamo dite "à champ fort" associée à une bifurcation supercritique [32].

Remarque 2 : la Terre et le Soleil ne sont pas les deux seuls objets astrophysiques qui présentent un champ magnétique. Les astrophysiciens ont observé que la plupart des planètes et des étoiles en possèdent un. Il a été découvert qu'à plus grande échelle, les galaxies ainsi que les amas galactiques possèdent eux aussi un champ magnétique. On rencontre donc des champs magnétiques à des échelles de taille très variées dans l'univers. Si l'effet dynamo est, selon toute vraisemblance, à l'origine du magnétisme des planètes et des étoiles, la question est encore débattue en ce qui concerne l'origine du champ des galaxies. Celles-ci sont suffisamment grandes pour que le temps de vie des courants électriques soit comparable à l'âge de l'univers. Il existe une controverse qui oppose les partisans d'un champ primordial à ceux qui pensent que le champ magnétique résulte d'un effet dynamo.

I.3 La génératrice auto-excitée

Dans le sens commun, une dynamo est un dispositif qui permet de convertir l'énergie d'un mouvement en courants électriques. Le dispositif que nous présentons dans cette section, appelé génératrice auto-excitée, est assez proche du dispositif dynamo-électrique utilisé par Siemens en 1867 [37] (figure I.2 (a)) pour démontrer qu'il est possible d'obtenir un courant électrique continu à partir du mouvement d'un conducteur.

Les figures I.2 (a) et (b) montrent une photographie d'une dynamo de Siemens de type D15, ainsi qu'une représentation schématique du circuit électrique de la génératrice. Ces dispositifs ont en commun d'être constitués de deux parties distinctes : la première partie, appelée stator, est fixe et consiste en un bobinage de cuivre enroulé autour d'une carcasse en acier ferromagnétique. Elle constitue un électroaimant qui permet d'obtenir un champ magnétique intense dans l'entrefer lorsque le bobinage est parcouru par un courant I_0 . À cette partie fixe, s'ajoute une partie mobile située dans l'entrefer, qu'on appelle l'induit, et qui est constituée d'un ensemble de spires (figure (a)) enroulées autour d'un rotor que l'on peut mettre en rotation à une fréquence Ω . L'ensemble des spires est relié à deux bornes par un contact glissant (appelé collecteur), qui permet de redresser mécaniquement la tension aux bornes des spires. Lorsqu'un champ magnétique \vec{B} est présent dans l'entrefer



(a) Dynamo type D15 (Siemens & Halske, 1877)

(b) Génératrice auto-excitée

Fig. I.2: Figure (a) : photographie d'une dynamo de type D15 fabriquée à Berlin par Siemens & Halske en 1877. Figure (b) : machine à courant continu branchée en génératrice auto-excitée.

et que le rotor est en rotation à la fréquence Ω , le flux ϕ du champ magnétique au travers des spires varie, et il apparaît une différence de potentiel induite aux bornes du collecteur :

$$E_i = k\phi\Omega, \quad k = \text{cte.} \quad (\text{I.2})$$

Elle est proportionnelle au flux ϕ , à la fréquence de rotation, et son signe est donné par le sens de rotation. Dans la configuration de génératrice auto-excitée, on branche l'inducteur sur l'induit, et c'est un opérateur extérieur (rivière, machine à vapeur ...) qui fait tourner le rotor à une fréquence constante Ω .

Remarque : ce dispositif est donc très proche de la dynamo de vélo. La différence tient uniquement au fait que le stator de la dynamo du vélo n'est pas constitué d'un électro-aimant, mais d'un aimant permanent, ce qui lui confère la propriété de fournir un courant électrique proportionnel à la vitesse du cycliste.

Étude en boucle ouverte : on suppose pour l'instant que le stator, de résistance électrique R_s , est parcouru par un courant I_0 fourni par un générateur. Ce courant crée donc un champ B_0 dans l'entrefer qui donne un flux maximal $\phi(I_0)$ au travers d'une des spires du rotor. Lorsque le rotor tourne, on enregistre aux bornes du collecteur une différence de potentiel induite $E = k\phi(I_0)\Omega$, ce qui montre que l'induit se comporte comme un générateur de force électromotrice $E_i = k\phi\Omega$, et de résistance interne R_r . En branchant ce générateur aux bornes d'un récepteur de résistance R_s , on obtient un courant électrique induit

$$I_1 = \frac{E_i}{R_s + R_r} = \frac{k\phi\Omega}{R_s + R_r}, \quad (\text{I.3})$$

dont le sens dépend directement du sens de rotation du rotor, et qui devient plus grand en valeur absolue que le courant I_0 lorsque le rotor tourne suffisamment vite. Toutefois,

pour l'instant le système n'est pas bouclé, et il nous faut connecter les bornes du stator à celles du rotor si on veut que le courant I_1 puisse renforcer le courant I_0 . Dans une telle situation, qui est celle de la figure I.2 (b), il n'y a alors plus de générateur extérieur, et l'opérateur ne sert qu'à entretenir le mouvement du rotor.

Étude en boucle fermée : lorsqu'on relie les bornes du stator à celles du rotor, le montage est dans la configuration de la figure I.2 (b). Notant L , le coefficient d'auto induction de l'ensemble des spires, et $R_t = R_s + R_r$ la résistance totale du circuit, le courant électrique I vérifie alors l'équation :

$$L \frac{dI}{dt} + R_t I = k \Omega \phi(I). \quad (\text{I.4})$$

Pour analyser la stabilité du montage, nous allons considérer la possibilité de croissance d'un très petit courant électrique i , ce qui permet de négliger les non linéarités introduites par le matériau ferromagnétique, et donc d'écrire que le flux au travers d'une spire, $\phi(i)$, est proportionnel au courant électrique i . Notant M le coefficient de mutuelle induction entre les spires du rotor et celles du stator, le courant électrique est alors solution de l'équation :

$$L \frac{di}{dt} + (R_t - k M \Omega) i = 0, \quad (\text{I.5})$$

qui est identique à l'équation électrique de la dynamo disque de Bullard [20]. Nous allons l'utiliser pour analyser les résultats que nous avons obtenus en utilisant un moteur à courant continu de 250 W, de résistance totale 271 Ω , dont nous avons relié les bornes du rotor à celles du stator de telle manière que le coefficient M soit positif. La figure I.3 montre (en ronds pleins) l'évolution du courant électrique circulant dans le circuit en fonction de la vitesse de rotation du rotor lorsque la carcasse du moteur a été préalablement désaimantée.

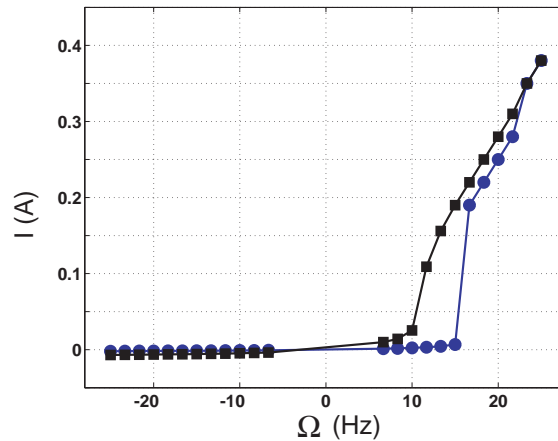


Fig. I.3: Diagramme de bifurcation du système expérimental. Le moteur utilisé est un moteur à courant continu de 250 W dont la résistance totale (stator+rotor) est $R = 271 \Omega$. Ronds pleins (●) : bifurcation parfaite sur la courbe de première aimantation lorsque le matériau a été préalablement désaimanté. Carrés pleins (■) : bifurcation imparfaite sur le cycle d'hystérésis. Une fois la première bifurcation passée, on parcourt indéfiniment la courbe (■) lorsqu'on tente d'obtenir l'instabilité.

- On observe sur la figure I.3 que lorsque le sens de rotation est négatif, le courant dans le circuit est nul quelle que soit l'amplitude de la vitesse. Comme le montre l'équation I.3, cette situation correspond à un bouclage négatif pour lequel une fluctuation de courant i_0 induit un courant $i_1 = -(kM | \Omega | / R_t) i_0$ qui tend à la supprimer. Conformément à l'équation I.5, l'amplitude de la perturbation i_0 décroît alors exponentiellement vers la valeur nulle en un temps $\tau = L/(R_t - kM\Omega)$. Le système est donc stable, et la valeur du courant ne peut être que nulle en régime stationnaire.

- Contrairement au cas précédent, lorsque la rotation est positive, on observe un changement radical dans l'évolution du courant en fonction de la vitesse de rotation. Tant que la vitesse est plus petite que la valeur critique $\Omega_c = 15$ Hz, le courant mesuré est nul, alors qu'au-delà de cette valeur on mesure un courant stationnaire dont l'amplitude augmente avec la vitesse de rotation. Encore une fois, la valeur seuil peut se comprendre à l'aide de l'équation I.3 qui montre que lorsque le bouclage est positif, et que la vitesse de rotation est plus grande que $\Omega_c = R_t/kM$, une fluctuation i_0 engendre un courant induit $i_1 = +(kM | \Omega | / R_t) i_0$, dont le module est plus grand que i_0 , et qui vient renforcer la fluctuation. Comme le montre l'équation I.5, cette situation instable s'accompagne de la croissance exponentielle de la fluctuation i_0 vers une valeur $I \neq 0$, avec le taux de croissance $\tau' = L/(kM\Omega - R_t)$. On est donc en présence d'un phénomène de bifurcation, de l'état stable $I = 0$ à l'état instable $I \neq 0$, lorsque le bouclage est positif et que la vitesse est suffisamment grande.

Saturation de l'instabilité : une fois dans le régime instable, le champ magnétique ne peut croître indéfiniment. Il faut alors prendre en compte les non-linéarités du système, ainsi que la rétroaction de la force de Laplace qui crée un couple résistant $\Gamma = k\phi I$ tendant à freiner la rotation du rotor. On pourra noter que dans le cas présent, l'opérateur doit fournir en plus une puissance $R_t I^2 \sim 40$ W pour maintenir les courants électriques, ce qui représente environ 20% de la puissance mécanique nominale de la génératrice lorsqu'elle est utilisée en moteur.

Conclusion de l'étude : cette courte étude de la génératrice auto-excitée nous a permis d'entrevoir quelques aspects de l'effet dynamo :

- c'est un mécanisme d'instabilité qui repose sur le mouvement d'un conducteur (ici le bobinage du rotor) dans un champ magnétique.
- Pour qu'il puisse y avoir instabilité, il faut que le circuit soit bouclé positivement. C'est à dire que le champ induit par le mouvement vienne se superposer constructivement au champ magnétique initialement présent.
- Lorsque le bouclage est positif, l'instabilité a lieu quand les effets d'induction surpassent la dissipation par effet Joule. Dans notre cas, cette condition se traduit par l'inégalité $E = k\phi(I)\Omega \geq R_t I$.
- Une fois que l'amplitude du champ magnétique est suffisamment grande, alors les forces de Laplace assurent une rétroaction sur la partie mécanique du système, ce qui fait saturer l'instabilité.

Remarque 1 : une fois qu'on a dépassé la valeur seuil Ω_c , et obtenu un champ magnétique dans le matériau, lorsqu'on diminue la vitesse de rotation, on ne décrit pas la courbe en ronds pleins en sens inverse. On décrit une nouvelle courbe (en carrés pleins, figure I.3)

pour laquelle le courant ne s'annule pas brutalement lorsqu'on repasse le seuil, mais ne s'annule que lorsque le stator est arrêté. Ce résultat se comprend lorsqu'on prend en compte le caractère ferromagnétique de la carcasse de la génératrice. En effet, dès lors qu'on a aimanté le matériau, celui-ci ne décrit plus la courbe de première aimantation, et il reste une aimantation rémanente qui donne un flux ϕ' même en l'absence de rotation. L'analyse que nous avons faite à partir de l'équation I.5 ne décrit donc plus le système, et l'équation I.5 doit être modifiée en :

$$L \frac{dI}{dt} + R_t I - k\Omega\phi(I) = k\Omega\phi', \quad (\text{I.6})$$

qui montre que le champ rémanent se comporte comme une source extérieure. Lorsqu'on diminue la vitesse de rotation pour repasser en dessous du seuil Ω_c , le courant électrique stationnaire décrit la courbe solution de l'équation

$$R_t I - k\Omega\phi(I) = k\Omega\phi', \quad (\text{I.7})$$

L'évolution non linéaire du courant avec Ω est donc un reflet de la relation non linéaire qui lie le flux ϕ et le courant électrique I circulant dans le bobinage. Lors des expériences ultérieures, partant d'une situation pour laquelle la carcasse magnétique n'a pas été préalablement désaimantée, on n'observe plus la bifurcation brutale de la courbe en ronds pleins, mais on décrit la courbe plus douce en carrés pleins, qui n'est autre qu'une bifurcation en champ appliqué.

Remarque 2 : comme l'a montré la figure I.2 (a), une caractéristique essentielle de la dynamo de Siemens réside dans la présence d'un arrangement complexe de fils électriques. Celui-ci, qui vise à optimiser le couplage entre l'inducteur et l'induit, contraint la forme des courants électriques qui sont forcés de produire un champ induit parallèle au champ appliqué. La condition d'instabilité est alors très simple puisqu'il suffit de tourner dans le bon sens pour que le bouclage soit positif, et suffisamment vite pour que le champ induit soit plus grand en module que le champ appliqué. Naturellement, dans le cas d'un écoulement homogène de métal liquide, pour lequel il n'existe aucun circuit électrique permettant d'assurer un bouclage positif, rien ne permet de dire a priori si l'écoulement va permettre d'entretenir un champ magnétique par effet dynamo. Le problème est alors beaucoup plus complexe puisqu'une fois qu'on dispose d'un écoulement capable de produire un champ magnétique par effet dynamo, il faut déterminer le seuil de l'instabilité, la géométrie du champ instable, et enfin son mode de saturation dans le régime non linéaire.

I.4 Observations de l'effet dynamo

I.4.1 Une genèse difficile

Après la formulation de l'hypothèse de Larmor en 1919, la question s'est posée de savoir sous quelles conditions un écoulement homogène de métal conducteur de vitesse \vec{V} pouvait amplifier un champ magnétique \vec{B} par effet dynamo. Il s'est révélé bien difficile d'y répondre, et jusqu'aux années 50, les résultats théoriques produits ont été des théorèmes anti-dynamo qui ont montré qu'on ne peut espérer obtenir l'effet dynamo lorsque

l'écoulement considéré possède une structure trop symétrique. Il aura donc fallu attendre 1954 pour que Bullard & Gellman obtiennent le premier exemple numérique d'écoulement dynamo [21], suivis en 1957 par Herzenberg [49]. Il aura ensuite fallu attendre 1963 (54 ans après Larmor, 100 ans après Siemens) pour que Lowes & Wilkinson [56, 57] observent pour la première fois expérimentalement l'effet dynamo homogène, c'est à dire en l'absence de bobinages contraignant la forme des courants électriques. Dans une expérience inspirée du modèle de Herzenberg, ils ont observé la croissance et la saturation d'un champ magnétique en mettant en rotation rapide deux cylindres en fer, d'axes de rotation non parallèles, qui sont contenus dans un bloc de métal au repos (figure I.4). Si cette expérience apporte beaucoup plus que la dynamo de Siemens, puisqu'il n'y a pas de circuit électrique assurant un bouclage du système, il s'agit encore d'une expérience de type "rotor solide" dont le mécanisme de saturation ne peut provenir que d'une diminution de l'amplitude de la vitesse (freinage des rotors), et non d'une modification du mouvement comme dans le cas d'une dynamo fluide homogène.

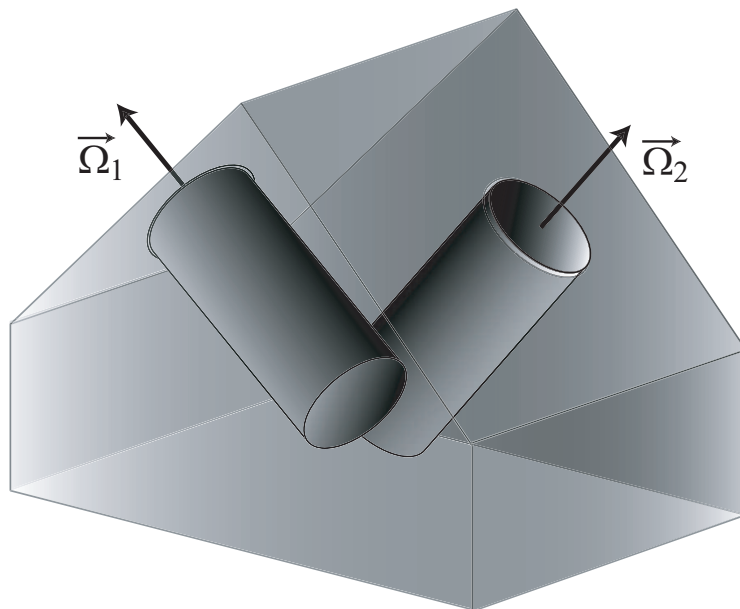


Fig. I.4: Schéma de principe de l'expérience de Lowes et Wilkinson.

I.4.2 Les dynamos fluides

La démonstration expérimentale de l'effet dynamo fluide est très récente puisqu'elle date de l'année 2000. Elle a été réalisée quasiment simultanément par deux groupes, l'un situé à Karlsruhe en Allemagne [101], et l'autre situé à Riga en Lettonie [42]. Ces deux expériences ont en commun d'utiliser le sodium (liquide à 100 °C), qui est le métal le plus conducteur que l'on puisse utiliser dans une expérience de laboratoire.

L'expérience dynamo de Riga [42, 43] est inspirée de l'écoulement dynamo de Ponomarenko [81], pour lequel le fluide est en mouvement de translation et de rotation solide dans un cylindre infini, baignant dans un milieu conducteur au repos. Le dispositif expérimental (figure I.5 (a)) est constitué de trois coquilles cylindriques coaxiales d'une hauteur de 3 m. Le fluide contenu dans le tube central de diamètre 25 cm, est mis en mouvement

de rotation et translation par une hélice. La cuve étant fermée, il s'établit un écoulement vertical de retour dans l'anneau du milieu, ce qui permet au fluide de circuler en boucle au sein du dispositif. Le troisième cylindre, qui contient du sodium au repos, permet d'abaisser le seuil de l'instabilité [9]. Ce dispositif produit un champ magnétique oscillant à une fréquence voisine du Hertz, dont l'amplitude est de l'ordre de 350 G (35 mT).

L'expérience dynamo de Karlsruhe [101] est inspirée de l'écoulement dynamo de G.O. Roberts [88], pour lequel le fluide est aussi en mouvement hélicoïdal, mais à une échelle beaucoup plus petite que la taille de l'expérience (figure I.5 (b)). Le dispositif expérimental est constitué d'un cylindre de diamètre 1.84 m contenant un ensemble d'une cinquantaine de tuyaux qui assurent, grâce à leur structure en forme de vis, un mouvement du fluide avec une composante verticale et une composante de rotation. Dans ce cas, ce sont des pompes électromagnétiques qui entraînent le fluide, et ce sont les parois des tubes qui imposent l'écoulement de rotation. Cette expérience a permis d'observer la croissance et la saturation d'un champ magnétique stationnaire, d'amplitude 700 G, et dont la direction est perpendiculaire aux colonnes.

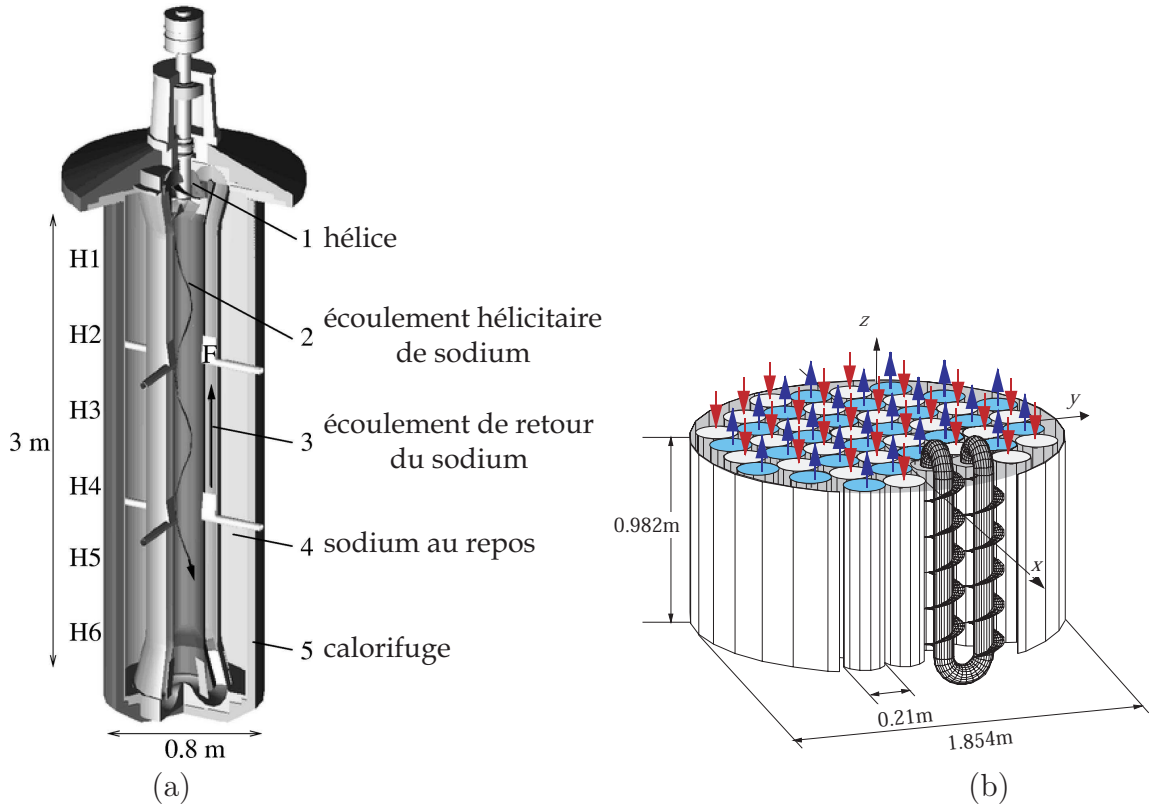


Fig. I.5: Figure (a) : représentation schématique de l'expérience de Riga en Lettonie. Figure (b) : expérience dynamo de Karlsruhe.

Résultats obtenus : ces deux expériences ont permis la mise en évidence de l'effet dynamo fluide, ce qui représente une confirmation indiscutable de la prévision de Larmor. Dans les deux cas, le seuil d'instabilité expérimentalement mesuré s'est avéré être très proche des prévisions théoriques faites à partir de l'écoulement moyen. Ceci tend à montrer que les mouvements turbulents à petite échelle, qui accompagnent nécessairement

les écoulements au laboratoire, ont une influence négligeable sur le seuil de l'instabilité. Toutefois, ce résultat n'est pas surprenant puisque ces deux expériences "faible bruit" ont été construites pour mimer des écoulements modèles lisses. Elles utilisent écoulements contraints par des parois, et obtiennent ainsi un écoulement relativement calme avec un taux de turbulence n'excédant pas 10%, ce qui est faible en comparaison des taux de turbulence qu'on peut obtenir dans des écoulements plus libres.

I.4.3 Les expériences de seconde génération

Les deux seules expériences de dynamo fluide ayant été obtenues dans des écoulements contraints par la présence de parois, la rétroaction du champ magnétique ne peut se faire qu'au travers d'une déformation de l'écoulement à grande échelle.

Dans le cas de l'expérience de Karlsruhe, le fluide est mis en mouvement hélicoïdal du fait de la présence des parois, et le champ magnétique ne peut que freiner le fluide sans modifier réellement la topologie de l'écoulement. Ce régime de saturation, qui s'apparente à celui des dynamos solides, est donc moins riche que celui observé dans l'expérience de Riga pour lequel la paroi interne ne sert qu'à stabiliser l'écoulement, mais non à l'imposer. Il a été montré que, dans cette géométrie un peu plus libre, l'instabilité sature du fait de la modification du profil vertical de la composante de rotation de l'écoulement [44].

Toutefois, comme le fluide est guidé par des parois, le champ magnétique ne peut pas briser la géométrie du champ de vitesse, et celui-ci est forcé de se déformer en restant au voisinage d'un écoulement de type Ponomarenko. La question de l'observation expérimentale de l'effet dynamo dans une expérience pour laquelle l'écoulement n'est pas contraint par des parois, qui permettrait d'obtenir un couplage dynamique entre la géométrie du champ de vitesse et la structure du champ magnétique reste pour l'instant sans réponse. Au jour d'aujourd'hui, ces régimes dynamiques n'ont pu être atteints que dans les simulations numériques [47, 69] où on calcule à la fois le champ de vitesse et le champ magnétique. Ces simulations permettent d'étudier l'instabilité dynamo dans le régime de saturation, mais travaillent à des valeurs de paramètres (viscosité, diffusivité magnétique, nombre d'Ekman ou de Rosby,...) qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs de celles estimées pour les planètes ou les métaux liquides. Les techniques de simulation devenant de plus en plus performantes, les méthodes récentes, de type Large Eddy Simulation [82] en géométrie cartésienne périodique, ou de type quasigéostrophique [91, 90] en géométrie sphérique, permettent de modéliser de mieux en mieux le problème dynamo dans des écoulements turbulents qui commencent à ressembler à ceux observés expérimentalement. Toutefois, ces techniques sont performantes car elles font appel à des hypothèses (absence de couches limites hydrodynamique pour [82], structure quasi-bidimensionnelle de l'écoulement pour [91, 90]), dont on ne sait pas si elles sont pertinentes pour décrire les systèmes réels. Les expériences de laboratoire restent donc incontournables, et plusieurs expériences dynamo, dites de seconde génération, ont été réalisées. Elles visent à étudier l'effet dynamo, ainsi que sa saturation, dans des géométries moins contraintes que celles des dynamos de Riga et de Karlsruhe.

- **L'expérience dynamo de Perm** [40] est actuellement en construction à l'Institut de Mécanique des Milieux Continus de Perm en Russie. Elle utilise le sodium liquide, et vise à l'obtention de l'effet dynamo dans un écoulement instationnaire de type Ponomarenko.

renko. C'est une expérience de spin-down pour laquelle le mouvement initial de rotation solide est converti, grâce à une hélice fixe par rapport au tore, en un écoulement hélicoïdal capable de produire l'effet dynamo [31]. Parallèlement à la construction de l'expérience, des études concernant les effets d'induction sont menées dans un prototype utilisant un alliage Ga-In-Sn [71]. J'ai passé quelques mois de ma thèse au sein de ce laboratoire, et présenterai les résultats expérimentaux que nous avons obtenus aux chapitres IV et V.

- **L'expérience DTS de Grenoble** [27] est une expérience à caractère géophysique construite au LGIT de Grenoble. Ce n'est pas à proprement parler une expérience dynamo car elle ne vise pas (encore) à la génération d'un champ magnétique. Son but est ici d'étudier le comportement d'un écoulement de Couette sphérique en présence d'une forte rotation globale et d'un champ magnétique intense. L'écoulement sodium liquide est créé par cisaillement entre une sphère externe et une sphère interne aimantée qui tournent dans le même sens, mais à des vitesses légèrement différentes. Ce type d'écoulement permet de reproduire certains aspects des écoulements de convection dans des sphères en rotation rapide [91].

- **L'expérience de Socorro** [30] est en cours de construction au Nouveau-Mexique. Elle utilisera le sodium liquide, et vise à obtenir l'effet dynamo dans des conditions analogues à celles existant dans les disques d'accrétion en astrophysique. L'écoulement sera constitué d'un écoulement de Couette cylindrique, qui permet de simuler la rotation différentielle existant dans les disques d'accrétion, auquel s'ajoutent des jets pulsés périodiquement qui modélisent les collisions du disque avec les étoiles.

Les expériences que nous présentons ci-dessous ont toutes en commun d'utiliser un écoulement de von Kármán qui est créé entre deux hélices, ou deux disques coaxiaux [107]. La réalisation d'expériences utilisant ce type d'écoulement a été particulièrement motivée par les études numériques de Dudley & James [34], qui ont montré, en géométrie sphérique, que certains écoulements modèles simples peuvent produire l'effet dynamo lorsque la vitesse du fluide est suffisamment grande. Les écoulements axisymétriques (représentés en figure I.6) sont essentiellement de deux types : l'écoulement $s_1 t_1$ (figure (a)), qui est composé d'une composante azimutale de vitesse (appelée toroïdale) répartie dans l'ensemble du fluide, associée à une boucle de recirculation (appelée composante poloïdale). Cet écoulement peut produire un champ magnétique oscillant par effet dynamo, mais dans une gamme de paramètres difficilement accessibles aux expériences. Celles-ci utilisent donc un écoulement de type $s_2 t_2$ (figure (b)), qui est composé de deux cellules de vitesse azimutale contrarotatives, associées à une recirculation poloïdale qui se renverse de part et d'autre du plan équatorial, et qui est dirigée vers les pôles. Il est à noter que des simulations avec un forçage qui produit un écoulement de structure comparable [69, 82] la possibilité d'obtenir l'instabilité dynamo même en présence de turbulence à petite échelle, ce qui confirme la pertinence de leur choix pour la réalisation d'une expérience dynamo.

- **L'expérience du Maryland** : dans cette expérience, le sodium est contenu dans une sphère, et mis en mouvement par deux hélices coaxiales contrarotatives. Après une étude dans une sphère de petit diamètre (30 cm) [76, 93], ce groupe s'est lancé dans la construction d'une sphère de 3 m de diamètre dans laquelle les disques pourront tourner à une vitesse de l'ordre de 5 Hz. Il est à noter que cette expérience doit aussi permettre d'étudier

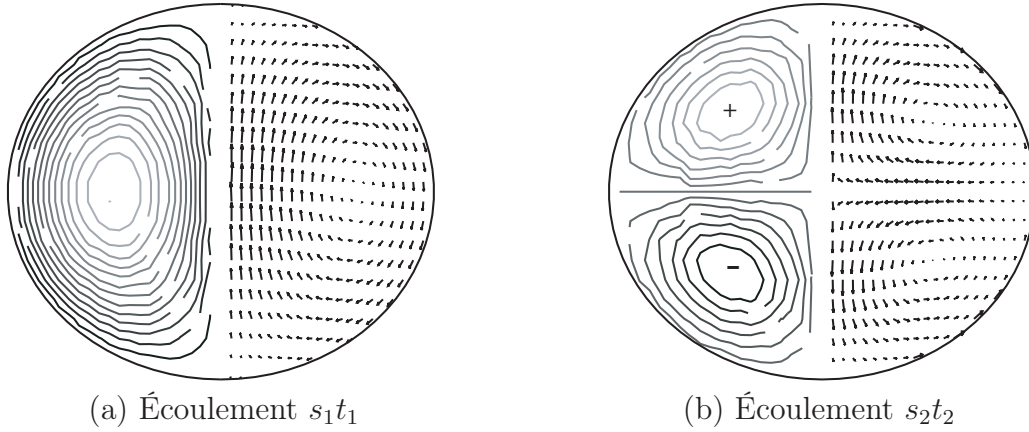


Fig. I.6: Figure (a) : écoulement s_1t_1 de Dudley & James dominé par une rotation globale et une vitesse axiale. Figure (b) : écoulement de type s_2t_2 qui possède une forte rotation différentielle, et dont le pompage axial se renverse par rapport au plan médian.

des écoulements en rotation globale dans une géométrie analogue à celle de l'expérience DTS. Des expériences en sodium, qui visent à étudier l'instabilité magnéto-rotationnelle (MRI) sont d'ailleurs déjà en cours dans une sphère de 60 cm de diamètre [97].

- **L'expérience MDX de Madison** [38, 39] est analogue au projet du Maryland. Elle a cependant déjà été construite, et utilise un écoulement de sodium liquide dans une sphère de 1 m de diamètre. Le fluide est mis en mouvement grâce à des hélices contrarotatives entraînées par deux moteurs pouvant délivrer une puissance de 75 kW chacun. Les mesures concernant cette expérience sont actuellement en cours.

- **L'expérience von Kármán sodium (VKS) de Cadarache** [16, 79] est construite au CEA Cadarache, seul lieu habilité en France à accueillir une expérience de recherche utilisant plus de 50 litres de sodium liquide. Elle résulte d'une collaboration entre les Écoles Normales Supérieures de Paris, de Lyon, et les CEA Saclay et Cadarache. Elle étudie la possibilité d'effet dynamo dans un écoulement de von Kármán engendré par la rotation de deux disques coaxiaux dans un cylindre de rayon $R \sim 20$ cm et de hauteur $H \sim 40$ cm. Cette expérience fait suite à une première étude des mécanismes d'induction dans un prototype utilisant le gallium (VKG) [73, 72], qui constitue une expérience plus souple que VKS, et permet d'étudier de manière fine les mécanismes d'induction [14]. La taille du dispositif VKS, ainsi que la forme des disques utilisés, résultent des études menées par l'équipe du CEA Saclay, qui mesure les champs de vitesse obtenus dans un prototype utilisant de l'eau (VKE), avant de les utiliser pour déterminer numériquement la vitesse minimale à atteindre pour obtenir l'instabilité dynamo. Le but est alors de déterminer quel est l'écoulement qui donne la condition la plus favorable, afin de le réaliser dans le sodium [22, 59]. Une première expérience (VKS1), qui a fonctionné entre 1998 et 2002, a permis de mettre en évidence, en présence d'un écoulement fortement turbulent, plusieurs mécanismes d'induction favorables à l'effet dynamo [16, 79]. Ce dispositif a permis d'observer un bouclage positif entre le champ induit et un champ extérieur appliqué lorsque la direction de celui-ci est perpendiculaire à l'axe de rotation [13]. Cependant le champ induit s'est révélé inférieur au champ appliqué, et l'effet dynamo n'a pas été obtenu [58]. Une seconde expérience, VKS2, qui représente une évolution du dispositif VKS1, est

opérationnelle depuis avril 2005. Elle est trois fois plus volumineuse et est équivalente au dispositif VKS1 entouré d'une couche de sodium au repos, ce qui est favorable à l'effet dynamo [9]. Elle dispose de deux fois plus de puissance que VKS1 (300 kW), et d'un dispositif de refroidissement du fluide. Elle permet d'opérer au-delà du seuil prévu par les simulations numériques basées sur la structure moyenne de l'écoulement [87]. Nous décrirons au chapitre VII les résultats préliminaires que nous avons obtenus au mois d'avril et de juillet 2005 avec ce dispositif.

I.5 Chronologie de la thèse et questions abordées

Lors de mon arrivée au laboratoire de l'ENS de Lyon en 2002, l'expérience VKS1 arrivait à son terme. Le début de ma thèse s'est donc articulé autour de l'étude expérimentale des mécanismes d'induction stationnaires dans l'expérience VKG, qui permet d'obtenir des écoulement de von Kármán de gallium liquide dans un dispositif souple d'utilisation. En ce temps (où la simulation itérative de mon prédécesseur, M. Bourgoin, commençait à produire ses premiers résultats), les questions posées étaient les suivantes :

- **dans le cas d'un champ extérieur imposé, peut-on relier simplement la valeur moyenne du champ induit à la structure du champ de vitesse moyen ?**
- **Existe-t-il une contribution des mouvements à petite échelle dans les effets d'induction mesurés ?**

Ces deux études font l'objet des chapitres IV et V.

Lors de la seconde année de la thèse, j'ai bénéficié du legs de la simulation numérique itérative développée par M. Bourgoin. Une première partie de l'année a donc été dévolue à l'étude des mécanismes d'induction dans un écoulement synthétique correspondant à l'image d'Epinal de la structure en colonnes de l'écoulement existant dans le noyau terrestre. La question posée était, elle aussi, double :

- **à la lumière des effets d'induction mesurés dans les écoulements expérimentaux, peut-on comprendre simplement les mécanismes générateurs d'effet dynamo dans un écoulement complexe tel que celui de la dynamo de Karlsruhe ?**
- **Alors que le mode dynamo de l'écoulement de Karlsruhe est un champ magnétique perpendiculaire aux colonnes, peut-on obtenir, en organisant les colonnes le long d'un anneau, un écoulement dynamo permettant d'entretenir un champ magnétique dipolaire parallèle à l'axe de rotation des colonnes ?**

Ces questions seront abordées dans la troisième partie, aux chapitres VIII et IX.

Durant cette seconde année, j'ai eu l'opportunité d'effectuer un séjour de 3 mois à l'ICMM de Perm en Russie pour effectuer, en compagnie de Vitaly Noskov, des mesures d'induction dans l'expérience du tore, qui utilise le gallium. La problématique posée par cette expérience est très voisine de celle posée par l'écoulement de VKG. Il s'est donc agi d'aller au-delà des mesures d'induction faites avec VKG, pour obtenir une comparaison des mécanismes d'induction à grande et petite échelle dans l'écoulement hélicitaire de Ponomarenko torique. Ces mesures seront présentées aux chapitres IV et V conjointement

aux études menées dans VKG.

À la fin de la seconde année de la thèse, nous avons fini l'élaboration d'une sonde multiple permettant de mesurer le champ magnétique induit en plusieurs points des écoulements obtenus dans VKG. La troisième année a donc été articulée autour de l'étude des fluctuations des profils de champ induit. Ces mesures nous ont conduit à soulever une question centrale pour l'observation expérimentale de l'effet dynamo dans un écoulement de von Kármán :

- **quelle est l'influence des fluctuations aux grandes échelles de l'écoulement de von Kármán $s_2 t_2$ sur les mécanismes d'induction ?**

Cette question délicate sera abordée au chapitre VI. Lors de la seconde partie de la troisième année de la thèse, après presque trois années d'attente, les efforts de l'ensemble des membres de l'équipe VKS ont enfin été récompensés et le dispositif VKS2 a reçu les autorisations nécessaires à son démarrage. L'utilisation d'un écoulement de sodium permettant d'obtenir des R_m de l'ordre de 50 pose naturellement toutes les questions concernant l'instabilité dynamo dans un écoulement non contraint. L'une d'entre elles nous a particulièrement motivés :

- **dans une expérience fonctionnant en régime pleinement non linéaire, le champ magnétique fluctue-t-il encore de manière gaussienne, ou montre-t-il des comportements inédits ?**

La description des résultats (préliminaires) obtenus avec le dispositif VKS2 lors des deux premières campagnes de mesure du mois d'avril et de juillet 2005 feront l'objet du chapitre VII.

Chapitre II

La magnétohydrodynamique et le problème de la dynamo

La magnétohydrodynamique (MHD dans la suite) est la mécanique des fluides conducteurs de l'électricité évoluant dans un champ magnétique. La dynamique de ces fluides est différente de celle des autres fluides (non conducteurs) car le champ de vitesse \mathbf{V} et le champ magnétique \mathbf{B} interagissent au travers de la force de Laplace et des effets d'induction. On distingue alors deux classes principales de phénomènes :

- Un champ magnétique intense peut modifier la dynamique de l'écoulement par l'intermédiaire de la force de Laplace. Cette propriété est, par exemple, très utile en métallurgie pour mélanger les métaux dans les hauts fourneaux. Elle est encore à la base de la plupart des pompes électromagnétiques utilisées dans les centrales nucléaires fonctionnant avec du sodium liquide.
- Un écoulement de fluide conducteur en présence de champ magnétique est le siège de courants induits qui modifient le champ appliqué. C'est le domaine de l'induction qui nous intéressera tout particulièrement dans la suite.

Nous pouvons signaler, comme nous l'avons rencontré dans le cas de la dynamo de Siemens, que ces deux aspects de l'interaction champ magnétique-écoulement ne sont pas disjoints et se rejoignent par exemple dans le cas de l'instabilité dynamo. Une fois que le champ est suffisamment intense, il modifie la topologie de l'écoulement, ce qui conduit à la saturation de l'instabilité.

II.1 Des équations de Maxwell à l'équation de l'induction

II.1.1 Rappels d'électromagnétisme

- **Approximation MHD** : On s'intéresse ici à la dynamique du champ magnétique \mathbf{B} en présence de l'écoulement incompressible d'un fluide conducteur. Nous noterons sa conductivité électrique σ , que nous supposons homogène, sa perméabilité magnétique μ_0 et son champ de vitesse \mathbf{V} . Par convention, et dans toute la suite du manuscrit, les caractères gras représenteront des vecteurs.

La dynamique du champ électrique \mathbf{E} , et du champ magnétique se déduit des équations de Maxwell. Notant ρ_e la densité de charges électriques et \mathbf{J} la densité volumique de courant

électrique, celles-ci s'écrivent dans le référentiel du laboratoire :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (\text{II.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{II.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (\text{II.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}), \quad (\text{II.4})$$

Notant, dans le référentiel de repos de la particule, le champ électrique \mathbf{E}' et la densité de courant \mathbf{J}' , la loi d'Ohm s'applique sous la forme

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (\text{II.5})$$

Dans toute la suite la vitesse \mathbf{V} de la particule de fluide sera faible devant la vitesse de la lumière (mouvement non relativiste), et on pourra écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

L'écriture de la loi d'Ohm se réduit donc à

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (\text{II.7})$$

qui suppose de manière implicite que la conductivité est une constante, et que l'on néglige le phénomène de magnétorésistance. Pour pouvoir appliquer ce résultat venant de l'électrostatique, il faut que les fréquences considérées soient simultanément faibles devant la fréquence f_c des collisions des électrons d'une part, et devant la fréquence de Larmor $f_l = eB/m$ d'autre part. Prenant un métal liquide évoluant dans un champ magnétique d'amplitude $B_0 = 100 \text{ G}$ (10^{-2} T), on obtient alors que ces fréquences sont respectivement $f_c \sim 10^{14} \text{ Hz}$ et $f_l \sim 10^{10} \text{ Hz}$. Or dans le problème qui nous préoccupe, la fréquence la plus haute sera liée à la turbulence du champ de vitesse. On peut alors en obtenir un ordre de grandeur en l'estimant à partir de la puissance injectée par unité de masse dans l'écoulement ($\epsilon \sim 10^3 \text{ W.kg}^{-1}$) et de la viscosité cinématique du fluide considéré ($\nu \sim 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$). Ces deux quantités permettent de construire la fréquence de Kolmogorov, qui correspond aux mouvements les plus rapides

$$f_K = \sqrt{\frac{\epsilon}{\nu}} \sim 10^5 \text{ Hz}, \quad (\text{II.8})$$

Puisque cette dernière est de l'ordre 10^4 Hz pour un écoulement de sodium, et 10^5 Hz pour un écoulement de gallium, elle sera donc toujours négligeable devant f_l et f_c . Le métal bouge donc suffisamment lentement pour que l'équilibre électronique soit satisfait à chaque instant, et évolue dans un champ suffisamment faible pour que la trajectoire des électrons soit balistique entre deux chocs. C'est ce qu'on appelle l'approximation MHD. Muni de la relation II.7, on peut alors comparer l'amplitude du courant électrique et du courant de déplacement. On trouve

$$\frac{|\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}|}{|\mathbf{J}|} = \frac{\epsilon_0 f_K}{\sigma} \sim 10^{-15}, \quad (\text{II.9})$$

ce qui montre que l'équation II.4 se réduit à l'équation

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.10})$$

• **Conservation de la charge :** Une conséquence intéressante de la présence simultanée de l'écoulement et du champ magnétique est que la densité de charge au sein du métal n'est plus nulle en régime stationnaire. En effet, dans ce régime la densité de courant vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (\text{II.11})$$

ce qui impose à la densité de charge au sein du milieu de vérifier

$$\rho_e = -\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.12})$$

Ceci implique qu'en général le volume n'est plus équipotentiel puisque le potentiel électrique ϕ vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} = \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.13})$$

Ainsi en présence du champ magnétique, la densité de charge se réarrange de telle sorte à assurer le caractère conservatif du courant électrique.

II.1.2 L'équation d'induction

Lorsque les champs dépendent du temps, le courant électrique fait intervenir à la fois les potentiels électrique et magnétique. On a alors la relation

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (-\nabla \phi + \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.14})$$

En prenant le rotationnel de cette équation, et en supposant que la conductivité est homogène, on aboutit à l'équation d'évolution du champ magnétique

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B}, \quad (\text{II.15})$$

dans laquelle nous avons noté $\lambda = 1/(\mu_0 \sigma)$ la diffusivité du champ magnétique. Nous verrons dans plusieurs cas que cette seule équation, nommée équation d'induction, ne permet pas de déterminer la topologie du champ magnétique induit qui dépend de manière cruciale des conditions aux limites à l'interface entre le volume \mathcal{V} englobant le fluide et le milieu extérieur. Nous considérerons dans la suite uniquement le problème où le fluide est contenu dans une enceinte de volume \mathcal{V} (de surface \mathcal{S}) et dont l'extérieur est constitué d'isolant. Dans ce cas, le champ magnétique vérifie à l'extérieur les équations $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et les relations de passage imposent que le champ magnétique et son rotationnel soient continus à l'interface \mathcal{S} .

Remarque : En particulier nous ne nous intéresserons pas (numériquement) au problème pour lequel l'interface entre le fluide et l'isolant est constitué d'une paroi épaisse de conductivité différente (en acier, ou en cuivre).

II.1.3 Interprétation, analogie et limites

Interprétation : pour interpréter cette équation d'évolution, multiplions la scalairement par \mathbf{B} et intégrons sur l'espace entier. On obtient alors l'équation :

$$\partial_t \int_{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\infty} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{r} + \sigma \int_{\infty} \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{II.16})$$

Il est alors possible de montrer [45] que cette égalité peut se réécrire :

$$\partial_t \int_{\infty} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\mathbf{r} = - \int_{\infty} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{r} - \int_{\infty} \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{II.17})$$

Sous cette forme, nous retrouvons le bilan d'énergie électromagnétique

$$\partial_t \mathcal{E}_m = -\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J, \quad (\text{II.18})$$

qui fait apparaître que l'énergie magnétique \mathcal{E}_m diminue toujours du fait de la dissipation ohmique ($\mathcal{P}_J < 0$). Il montre de plus que \mathcal{E}_m peut augmenter sous l'action du terme ($-\mathcal{P}_L$) qui n'est autre que l'opposé de la puissance des forces de Laplace $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Il traduit un transfert, dont le signe est indéterminé a priori, d'une partie de l'énergie cinétique en énergie magnétique.

L'équation d'induction représente donc la compétition entre une possible amplification du champ magnétique par le mouvement et l'effet Joule qui tend à faire diminuer l'amplitude de ce dernier.

Étudions l'équation d'induction II.15 dans les deux cas limites d'une vitesse nulle et d'une conductivité infinie :

• **Vitesse nulle :** Dans cette limite, l'équation se réduit à l'équation de diffusion

$$\partial_t \mathbf{B} = \lambda \Delta \mathbf{B}. \quad (\text{II.19})$$

Celle-ci, qui traduit la dissipation du champ magnétique par effet joule, montre que si aucune source externe n'impose un champ en un quelconque endroit de l'espace, alors le champ magnétique disparaît avec un temps caractéristique de l'ordre de $\tau_{\text{diff}} = L^2/\lambda$. Appliquons ce résultat au cas de la Terre en prenant $\lambda = 0.5 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ (valeur commune pour les métaux) et un rayon $R \sim 1000 \text{ km}$ pour le noyau de fer. On trouve que la durée de vie du champ magnétique terrestre est de l'ordre de 60000 ans en l'absence de sources. Les datations ayant montré que celui-ci existe depuis plus de trois milliards d'années, il doit donc exister une source interne de champ magnétique. Le champ magnétique s'inversant en un temps de l'ordre de 2000 ans, les renversements ne peuvent pas correspondre à une simple décroissance diffusive suivie d'une nouvelle phase de croissance. Ils doivent être le reflet de la dynamique complexe de l'écoulement de fer liquide dans le noyau terrestre.

• **Conductivité infinie :** Dans cette seconde limite, la dissipation disparaît et l'équation d'induction se réduit à

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.20})$$

Puisque le champ de vitesse et le champ magnétique sont à divergence nulle, cette équation peut se réécrire

$$\partial_t \mathbf{B} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{V}. \quad (\text{II.21})$$

Dans cette dernière écriture, nous avons fait apparaître la dérivée particulaire du champ magnétique $D_t \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}$. Nous pouvons alors noter que dans la limite de conductivité infinie, le champ magnétique vérifie la même équation que l'équation d'évolution d'une ligne matérielle $\delta \mathbf{r}$ au sein du fluide $D_t \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{V}$. Si nous choisissons un ensemble de lignes matérielles $\delta \mathbf{r}_B$ coïncidant avec le champ magnétique \mathbf{B} à l'instant initial, alors $\delta \mathbf{r}_B$ et \mathbf{B} vérifient la même équation différentielle du premier ordre avec la même condition initiale $\delta \mathbf{r}_B(0) = \mathbf{B}(0)$. Ces deux quantités coïncideront à chaque instant ultérieur. Nous en déduisons que le champ magnétique et les lignes matérielles évoluent conjointement et que le champ magnétique est gelé dans les lignes de champ de l'écoulement. Ceci constitue le théorème du champ gelé (identique au théorème de Kelvin pour la vorticité) et montre que les lignes de champ magnétique sont entraînées par les gradients de vitesse de l'écoulement.

II.1.4 Le nombre de Reynolds magnétique

Dans les systèmes réels que nous étudierons, la résistivité du milieu ne sera jamais nulle si bien que les effets dissipatifs s'opposeront aux effets d'induction et donc à la croissance du champ magnétique induit. Pour quantifier l'importance des effets d'induction par rapport aux effets de diffusion, on peut introduire un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds magnétique, dont la définition utilise les échelles de taille L et de vitesse U . Sa définition est :

$$R_m = \frac{\mathcal{O}(|\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})|)}{\mathcal{O}(|\lambda \Delta \mathbf{B}|)} = \frac{UL}{\lambda}, \quad (\text{II.22})$$

ce qui montre qu'elle est analogue à celle du nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ de la mécanique des fluides (qu'on aurait pu construire à partir de l'équation de la vorticité). Ces deux nombres ne sont pas indépendants puisque leur rapport $P_m = R_m/Re = \nu/\lambda$, appelé nombre de Prantl magnétique, est une caractéristique du fluide considéré.

Remarque : On peut écrire l'équation d'induction sous une forme ne faisant plus apparaître que des quantités sans dimensions. Pour cela, nous définissons les quantités adimensionnées :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{V}}{U} \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L} \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau_{\text{diff}}} = t \frac{\lambda}{L^2}.$$

On trouve alors que l'équation d'induction peut se réécrire sous la forme :

$$\partial_{\tilde{t}} \mathbf{B} = R_m \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{V}} \times \mathbf{B}) + \tilde{\Delta} \mathbf{B}. \quad (\text{II.23})$$

Cette écriture, qui est celle que nous utiliserons pour les simulations, fait apparaître l'induction comme un problème autosimilaire pour lequel seul R_m est a priori important. Nous verrons tout de même que dans la pratique, c'est le budget énergétique (ou encore la puissance moteur nécessaire) qui est déterminant et guide la conception des expériences. En effet pour l'ensemble des métaux liquides disponibles à l'échelle humaine (fer, mercure, gallium, sodium, étain ...), la diffusivité magnétique est toujours de l'ordre de l'unité. Ceci implique que le nombre de Prantl magnétique de l'ensemble de ces m  riaux est

toujours de l'ordre de 10^{-5} . Pour observer des effets d'induction non négligeables devant les effets de diffusion ($R_m \geq 1$), le nombre de Reynolds Re doit donc être gigantesque. Si l'écoulement n'est pas dominé par la force de Coriolis (rotation rapide), ou par la force de Laplace (champ intense), alors il doit être pleinement turbulent. Ce résultat est à l'origine de la difficulté (qu'elle soit expérimentale ou numérique) de travailler aux grands R_m .

II.2 Le problème de la dynamo

II.2.1 Position du problème

Lors de notre étude du bilan d'énergie II.17, nous avons observé qu'il était possible de convertir une partie de l'énergie mécanique du mouvement du fluide en énergie magnétique. Le signe de cette conversion étant indéterminé, il peut être positif dans certaines situations. Si le champ de vitesse du fluide possède une géométrie assurant $\mathcal{P}_L \leq 0$, et si le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment grand pour que les effets d'induction dépassent les effets de dissipation ($-\mathcal{P}_L \geq \mathcal{P}_J$), l'énergie magnétique devient une fonction croissante du temps. La solution triviale $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ de l'équation d'induction n'est de ce fait plus stable, et comme nous l'avons vu dans le cas de la dynamo de Siemens, un champ magnétique ayant la topologie adéquate se met à croître. C'est l'instabilité dynamo (dans sa version de bifurcation supercritique).

Remarque : Pour pouvoir observer cette dernière, il faut donc trouver un champ de vitesse qui permette d'amplifier le champ magnétique. Une fois ce premier pas difficile franchi, il faut alors déterminer numériquement le seuil au delà duquel la solution triviale devient instable. En général la valeur du seuil dépend des conditions aux limites, conductrices ou isolantes, existant à l'interface entre l'écoulement et le milieu extérieur.

Jusqu'à présent, nous n'avons évoqué que la partie magnétique du problème, et nous avons négligé l'action du champ magnétique sur l'écoulement du fluide conducteur. Bien évidemment, le champ magnétique instable ne peut croître indéfiniment, et lorsqu'il atteint une amplitude suffisante, il peut en retour modifier le mouvement en exerçant la force de Laplace $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ sur l'écoulement. Pour rendre compte du problème complet, il nous faut donc ajouter à l'équation d'induction, l'équation de Navier-Stokes qui décrit l'évolution du fluide et prend en compte la force de Laplace $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Notant p la pression, ρ la densité, et η la viscosité dynamique et enfin \mathbf{F} l'ensemble des forces volumiques (gravité, inertie, forçage ...), celle-ci s'écrit :

$$\rho(\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F} + \eta \Delta \mathbf{V}. \quad (\text{II.24})$$

Dans l'approximation MHD, il est possible de la réécrire en ne faisant intervenir que le champ magnétique :

$$\rho(\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) = -\nabla(p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{F} + \eta \Delta \mathbf{V}. \quad (\text{II.25})$$

Comme dans le cas de la dynamo de Siemens, la force de rétroaction est proportionnelle au carré du champ magnétique, et son action va modifier suffisamment le champ de

vitesse pour le rendre moins efficace vis-à-vis de l'instabilité. Ceci conduit donc à une saturation de l'amplitude du champ magnétique. Écrit sous cette forme, le problème non linéaire enrichit le problème déjà complexe de la mécanique des fluides en le couplant à la dynamique du champ magnétique. La dynamique des deux champs est donc forcément très riche, et rend la résolution du problème complet d'une grande complexité. Dans le meilleur des cas, celui-ci ne peut être résolu numériquement qu'en faisant des hypothèses sur la nature du mouvement comme par exemple la quasigéostrophie en géophysique [2, 91], ou encore en modélisant les petites échelles de la turbulence comme pour les simulations utilisant les techniques de la LES [82], ou encore l'hyperviscosité. On arrive alors à modéliser numériquement l'instabilité jusqu'à des nombres de Prandtl magnétiques de l'ordre de $10^{-2} - 10^{-3}$, ce qui est encore loin des paramètres réels. Si les simulations et modèles théoriques sont d'un apport indéniable, la communauté dynamo ne saurait se passer des expériences pour avancer.

II.2.2 La dynamo cinématique

Si le problème complet apparaît difficile à résoudre, on peut réduire sa complexité si on étudie uniquement la condition d'apparition de l'instabilité et non pas sa saturation. Dans cette approche, qu'on appelle cinématique, le champ de vitesse $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ est donné par l'équation de Navier-Stokes, et on néglige l'influence du couplage. Il s'agit alors de trouver le seuil de l'instabilité R_m^c ainsi que la forme du champ magnétique \mathbf{B}_{dyn} qui peut-être amplifié. Cette approche est valide pour la détermination du seuil car pour $R_m \leq R_m^c$, tous les modes propres de l'équation décroissent vers zéro dans la limite des temps longs, alors qu'au delà de R_m^c , et dans la première phase d'instabilité, le champ est amplifié à partir des fluctuations et son amplitude demeure suffisamment faible pour que la rétroaction du champ magnétique soit négligeable. Ce n'est donc que dans une seconde phase de l'instabilité, et lorsque le champ est suffisamment intense, que l'on doit tenir compte de la rétroaction.

Deux approches principales existent alors :

- La première, qui est la plus commune, consiste à résoudre l'équation d'évolution du champ magnétique en supposant qu'à l'instant initial celui-ci est une fluctuation, et à déterminer pour quel R_m il est amplifié par le champ de vitesse.
- La seconde, qui est valable pour les écoulements stationnaires, consiste en une étude de stabilité linéaire de l'équation d'induction où l'on détermine le taux de croissance p du champ magnétique lorsqu'on suppose qu'il s'écrit $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r})e^{pt}$ [81].

Remarque : La détermination du seuil d'instabilité cinématique pour les écoulements expérimentaux est un exercice difficile en soi. En effet, ceux-ci présentent des fluctuations spatio-temporelles à petite et grande échelle, ce qui rend leur modélisation impossible dans l'état actuel des choses. La voie suivie est donc en général celle de la mesure (ou de la modélisation) de l'écoulement grande échelle, qu'on suppose stationnaire (Karlsruhe, Riga, VKS) ou qu'on suppose modulé par une fonction du temps (Perm). Dans chacun des cas, la détermination cinématique du seuil est donc faite en oubliant la dynamique de l'écoulement. Si cette approche s'est révélée payante pour les dynamos de Karlsruhe d'une part, et de Riga d'autre part, puisque le seuil expérimental a été trouvé proche du seuil numérique, on peut se demander si cette propriété est une propriété commune des

écoulements pleinement turbulents possédant une structure stationnaire conduisant à la dynamo.

C'est en partie à ce problème qu'est dédiée la plus grande partie de ce mémoire, à savoir l'importance des fluctuations turbulentes et des échelles de taille intermédiaires de la vitesse dans la dynamique du champ magnétique à grande échelle.

II.2.3 Théorèmes anti dynamo

Avant de clore le sujet de la dynamo pour entamer celui de l'induction, nous citons quelques théorèmes découverts au XX^e siècle qui permettent de comprendre pourquoi, alors que les idées de Larmor datent de 1919, il aura fallu attendre 1955 pour voir germer le modèle de Bullard de dynamo à rotor solide [20], et 1973 (soit 54 ans !) pour que nous parvienne l'exemple de la dynamo de Ponomarenko [81] qui a donné la base d'une dynamo fluide expérimentale [42]. Cette difficulté à trouver des écoulements simples capables d'effet dynamo tient au fait que dès que \mathbf{V} ou \mathbf{B} possèdent trop de symétries, l'instabilité devient impossible. Nous citons en bloc la liste suivante, dont on ne sait pas si elle est exhaustive :

- Un écoulement plan (dont une composante cartésienne est nulle) ne peut entretenir un champ magnétique par effet dynamo (Zeldovich, 1957).
- Un écoulement, écrit en coordonnées sphériques, tel que $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_r = 0$ ou qui est purement radial ne peut produire de champ magnétique (Bullard et Gellman, 1954 ; Backus, 1958).
- Un champ de vitesse stationnaire axisymétrique ne peut pas produire un champ magnétique axisymétrique et stationnaire (Cowling, 1934).
- Un champ magnétique indépendant d'une coordonnée cartésienne ne peut pas être une solution dynamo de l'équation d'induction.

II.2.4 Ingrédients importants

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'un écoulement pouvant entretenir un champ magnétique par effet dynamo doit posséder une certaine complexité. La plupart des écoulements dynamo stationnaires sont basés sur la présence d'au moins l'un de ces trois ingrédients :

- Présence d'une structure possédant de l'hélicité cinétique $H = \int_V \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V} d^3\mathbf{r}$. C'est le cas de la dynamo de Riga (écoulement de Ponomarenko [81]), de la dynamo $s_1 t_1$ de Dudley & James [34], ainsi que de l'écoulement de la dynamo Karlsruhe (écoulement de Roberts [88]).
- Présence de rotation différentielle. C'est le cas des écoulements contrarotatifs de von Kármán [73], ou des écoulements de Couette sphériques [91].
- Présence de séparation d'échelle. C'est le cas de l'écoulement de Roberts (1972), qui est à la base de la dynamo de Karlsruhe.

Nous serons amenés à étudier l'importance de ces trois ingrédients lors de nos études tant numériques qu'expérimentales.

II.3 Les expériences d'induction

II.3.1 Cadre d'étude

Si l'instabilité dynamo est difficile à observer expérimentalement, tout écoulement de métal liquide est susceptible d'interagir avec un champ magnétique. Dans une expérience d'induction, comme celles auxquelles nous nous sommes intéressés, on étudie l'interaction entre un écoulement de métal liquide (du gallium ou du sodium dans notre cas) et un champ magnétique extérieur appliqué \mathbf{B}_0 . Dans une telle situation, le problème consiste donc à relier la réponse de l'écoulement, *i.e.* le champ induit $\mathbf{B}(t)$ qu'on peut mesurer en un point de l'écoulement, au champ appliqué \mathbf{B}_0 et au champ de vitesse $\mathbf{V}(t)$. L'équation qui régit l'évolution du champ induit n'est alors pas identique à l'équation II.15, qui doit être modifiée sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{II.26})$$

Dans les régimes de champs faibles considérés ($B_0 \sim 10$ G), et aux régimes de $R_m = UL/\lambda$ atteints ($R_m < 50$), le champ induit sera au mieux du même ordre de grandeur que B_0 . L'énergie magnétique sera alors toujours négligeable devant l'énergie cinétique. Le paramètre d'interaction

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}, \quad (\text{II.27})$$

qui quantifie l'importance de la force de Laplace $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ par rapport au terme inertiel $\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ de l'équation de Navier-Stokes, sera toujours négligeable devant 1. On pourra alors considérer que la force de Laplace n'influe pas sur la dynamique de l'écoulement, et le champ magnétique sera un vecteur passif dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude du champ appliqué \mathbf{B}_0 . Seule la géométrie du champ imposé sera donc importante puisqu'elle permettra selon les cas de sonder de manière anisotrope les caractéristiques du transport et de la déformation du champ magnétique par l'écoulement. L'étude de ces caractéristiques est importante dans la pratique à plusieurs égards :

- l'obtention de l'instabilité dynamo dans les écoulements expérimentaux présentant un fort taux de fluctuations paraît être d'une grande difficulté. L'étude expérimentale des mécanismes d'induction est donc une étude préliminaire nécessaire à l'optimisation des dispositifs.
- En utilisant un prototype de l'écoulement fonctionnant à bas R_m , on peut tenter d'étudier finement l'influence de la dynamique grande échelle de l'écoulement d'une part, et de la turbulence d'autre part, sur la dynamique du champ magnétique. Ceci constitue le centre d'intérêt de la seconde partie de ce manuscrit.
- Nous pouvons enfin mentionner une préoccupation dépassant le cadre de la dynamo puisque l'étude du transport d'un vecteur passif est d'une complexité intermédiaire entre les cas du transport d'un scalaire passif (un polluant par exemple), et le transport de la vorticité par un écoulement turbulent.

Remarque : Il faut noter que l'équation II.26 ne peut pas être simplement obtenue en faisant le changement $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$ dans l'équation d'induction. En effet, on obtient dans ce cas

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) + \lambda \Delta \mathbf{B}_0, \quad (\text{II.28})$$

qui n'est pas identique à l'équation II.26. Le paradoxe est levé si on réalise que \mathbf{B}_0 n'est pas une fonction harmonique parce que le rotationnel des courants électriques qui créent le champ imposé, $\nabla \times \mathbf{J}_0$, n'est pas nul. On trouve alors qu'il manque un terme dans l'équation précédente qui doit être écrite :

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times \frac{\mathbf{J}_0}{\sigma} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) + \lambda \Delta \mathbf{B}_0, \quad (\text{II.29})$$

Or l'égalité $\Delta \mathbf{B}_0 = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_0$ est vraie, qu'il y ait un mouvement ou non. On retrouve alors bien que le champ induit est solution de II.26. Une telle précision sera utile lors de l'analyse des effets d'induction en champ orthoradial appliqué. En effet un tel champ appliqué sera obtenu dans notre expérience au gallium grâce à un fort courant axial $\mathbf{J}_0 \sim J_0(r) \mathbf{e}_z$ circulant au sein du fluide.

II.3.2 L'approche mécaniste perturbative à bas R_m

Nous supposons dans toute la suite que le champ de vitesse \mathbf{V} , ainsi que le champ magnétique appliqué, sont stationnaires. Dans une telle situation, après un régime transitoire dont la durée est de l'ordre du temps de diffusion $\tau_{\text{diff}} = L^2/\lambda$, le champ induit solution de l'équation II.26 atteint un régime stationnaire pour lequel on a

$$\lambda \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) + \text{C.L.} \quad (\text{II.30})$$

Les effets d'induction en présence du champ appliqué sont alors constamment équilibrés par la dissipation Joule. La solution va alors représenter un compromis, arbitré par la valeur de R_m , entre entraînement des lignes de champ par l'écoulement et diffusion. Pour montrer ce résultat, supposons que R_m est petit devant 1 et utilisons la forme adimensionnée de l'équation II.26. Elle s'écrit :

$$\Delta \mathbf{B} + R_m \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = 0. \quad (\text{II.31})$$

Puisqu'elle est non linéaire par rapport au paramètre de contrôle (qui est la vitesse), elle sera en général difficile à résoudre numériquement. Toutefois dans la limite des faibles R_m , on peut tenter une approche perturbative en fonction du paramètre de contrôle R_m . Ceci conduit à postuler que la solution peut s'écrire comme un développement limité en fonction des puissances de R_m . On obtient alors

$$\mathbf{B} = R_m \mathbf{B}_1 + R_m^2 \mathbf{B}_2 + \dots + R_m^k \mathbf{B}_k + \dots \quad | \mathbf{B}_k | \sim \mathcal{O}(1) \quad (\text{II.32})$$

En ne retenant que le premier terme de ce développement, on obtient alors :

$$\Delta \mathbf{B}_1 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) = 0, \quad (\text{II.33})$$

qu'on peut réécrire puisque \mathbf{V} et \mathbf{B}_0 sont à divergence nulle,

$$\Delta \mathbf{B}_1 = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}. \quad (\text{II.34})$$

Cette égalité montre donc que le champ induit à l'ordre 1 résulte de la solution d'une équation de Poisson dont le terme source fait intervenir les gradients de la vitesse et du champ imposé. Le terme de droite correspond à la création d'un champ induit \mathbf{B}_1

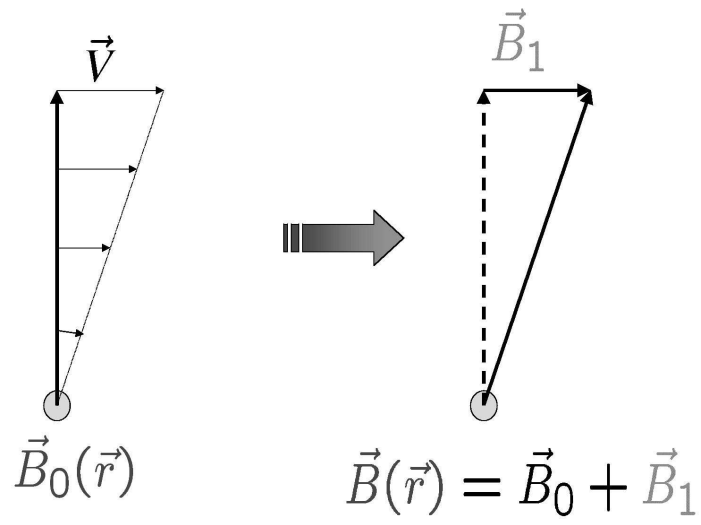


Fig. II.1: Production d'un champ induit \mathbf{B}_1 par étirement des lignes de champ de \mathbf{B}_0 .

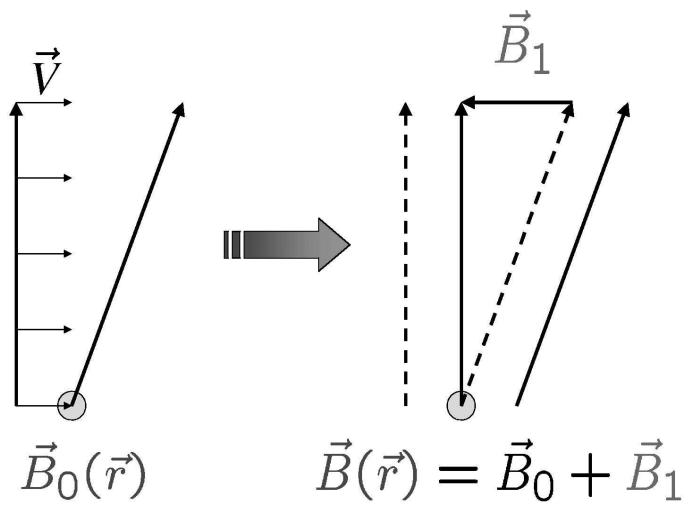


Fig. II.2: Production d'un champ induit \mathbf{B}_1 par advection d'un champ \mathbf{B}_0 non uniforme.

par déformation des lignes de champ de \mathbf{B}_0 par les gradients de la vitesse (figure II.1). Le terme de gauche correspond, quant à lui, à la production d'un champ induit par transport du gradient du champ appliqué (figure II.2).

Toutefois comme nous l'avons souligné auparavant, cette vision du processus d'induction par déformation et transport des gradients est une vision locale qui est limitée par le caractère diffusif du champ magnétique. Ce dernier étant solution de l'équation de Poisson dont une solution formelle s'écrit (en supposant que le milieu conducteur est infini et que le mouvement a lieu dans un volume \mathcal{V}) :

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{R_m}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\nabla'_{\mathbf{r}} \times (\mathbf{V}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{II.35})$$

Cela montre que le champ induit, loin d'être accroché aux lignes de champ de \mathbf{V} , possède une structure plus lisse que les gradients de la vitesse puisque \mathbf{B} résulte de leur intégration sur la taille du volume délimitant le mouvement.

Remarque : L'analyse développée s'appliquera donc aux mesures d'induction moyennées dans le temps, ou encore de manière quasistatique si le temps caractéristique d'évolution de l'écoulement τ_v est grand devant le temps de diffusion.

II.3.3 Cas des grands R_m

Lorsqu'on augmente R_m , alors la réponse de l'écoulement cesse d'être linéaire et il faut prendre en compte les termes suivants dans le développement limité. En injectant l'expression $\mathbf{B} = R_m \mathbf{B}_1 + R_m^2 \mathbf{B}_2$ dans l'équation II.31, et en égalant les termes proportionnels à R_m^2 , on obtient \mathbf{B}_2 comme solution de l'équation

$$\Delta \mathbf{B}_2 = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{V}. \quad (\text{II.36})$$

Les effets d'ordre 2 s'obtiennent donc par transport et déformation du champ obtenu à l'ordre 1. Lorsque R_m devient encore plus grand, il faut alors inclure plus de termes pour décrire correctement la solution de l'équation d'induction. Ceci conduit au calcul du champ magnétique induit sous la forme d'une série entière dont le paramètre de développement est R_m . Le champ induit s'écrit alors

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \mathbf{B}_k \quad | \mathbf{B}_k | \sim \mathcal{O}(1) \quad (\text{II.37})$$

Le calcul des ordres \mathbf{B}_k se fait alors de la même manière que pour \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 . On peut en effet montrer par récurrence que le champ \mathbf{B}_k s'obtient par transport et déformation du champ \mathbf{B}_{k-1} comme solution de l'équation de Poisson

$$\Delta \mathbf{B}_k = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1} \cdot \nabla \mathbf{V}. \quad (\text{II.38})$$

Ceci définit donc un algorithme de base permettant, en incluant les conditions aux limites, de calculer le champ induit à tous les ordres, et donc d'obtenir le champ induit pour n'importe quel R_m considéré. Nous verrons au cas par cas que cette approche perturbative converge vers la solution si R_m est inférieur à une valeur R_m^* mais qu'une méthode appelée méthode des approximants de Padé permettra de resommer la série pour en étendre le rayon de convergence.

II.4 Méthode numérique itérative

Nous décrivons dans cette section les détails de la méthode itérative mise au point dans l'équipe (avant mon arrivée), et qui permet de résoudre l'équation de Poisson dont est solution \mathbf{B}_k , en tenant compte des conditions aux limites à l'interface entre le volume contenant le métal et le milieu extérieur.

Cette méthode ainsi que sa confrontation au calcul analytique de l'expulsion d'un champ transverse par un mouvement de rotation solide d'une part, et à l'expérience d'autre part, sont largement décrites dans les références [13, 15] aussi, ne décrivons-nous que les éléments essentiels à la compréhension des résultats de ce manuscrit.

II.4.1 Algorithme et implémentation

Le but est donc d'obtenir l'ensemble des coefficients de la série

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \mathbf{B}_k, \quad (\text{II.39})$$

qui représente le champ induit par l'écoulement lorsqu'on lui impose un champ extérieur \mathbf{B}_0 . Il nous faut pour cela résoudre la hiérarchie d'équations de Poisson

$$\Delta \mathbf{B}_k = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}), \quad (\text{II.40})$$

associée aux conditions aux limites. Nous considérons la situation où un fluide de conductivité homogène est contenu dans un cylindre de rayon R et de hauteur H (de volume \mathcal{V} , d'interface \mathcal{S} , et de normale sortante \mathbf{n}). Dans tous les cas, le milieu extérieur sera supposé isolant.

Pour un tel problème, les conditions aux limites associées à \mathbf{B}_k ne se réduisent pas à des conditions aux limites de Neumann ou de Dirichlet, mais traduisent le raccordement par continuité de $\nabla \times \mathbf{B}_k$ et \mathbf{B}_k sur la surface \mathcal{S} à un champ potentiel dans l'espace isolant. Écrite sous cette forme, l'équation de Poisson peut se résoudre dans la géométrie sphérique mais le problème est un peu plus compliqué pour une forme cylindrique (dommage). On peut toutefois contourner ce problème en s'intéressant aux courants électriques pour lesquels les conditions aux limites sont plus simples puisqu'elles s'écrivent $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la surface, ne traduisant que le confinement des courants dans l'espace conducteur. Une fois que nous aurons obtenu les courants électriques, il nous sera facile de déduire la topologie du champ induit par la loi de Biot et Savart (valable car \mathcal{V} est borné). Pour cela nous écrivons le potentiel électrostatique ϕ , le champ électromoteur $\mathbf{e} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$, et le courant électrique $\mathbf{J} = -\nabla \phi + \mathbf{e}$ sous la forme de trois séries :

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \phi_k, \quad (\text{II.41})$$

$$\mathbf{e} = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_k, \quad (\text{II.42})$$

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \mathbf{J}_k, \quad \mathbf{J}_k = -\nabla \phi_k + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_k. \quad (\text{II.43})$$

La procédure est alors la suivante :

- Puisqu'on connaît le champ à l'ordre \mathbf{B}_{k-1} , on peut calculer la force électromotrice $\mathbf{e}_k = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}$.
- Comme \mathbf{J}_k est à divergence nulle, il apparaît un gradient de potentiel tel qu'on ait

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi_k + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}) = 0. \quad (\text{II.44})$$

Le potentiel électrique vérifie alors l'équation de Poisson

$$\Delta \phi_k = \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}). \quad (\text{II.45})$$

Les conditions aux limites qui lui sont associées sont alors plus simples puisqu'elles s'écrivent

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (\text{II.46})$$

Ce n'est autre qu'une condition aux limites de Neumann, et il existe des techniques standard et des solveurs adaptés à la géométrie cylindrique qui permettent de résoudre cette équation.

- On connaît alors le courant électrique $\mathbf{J}_k = -\nabla \phi_k + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}$, ce qui permet d'obtenir \mathbf{B}_k par la relation

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{r}' \in \mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_k(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{II.47})$$

Pour une question de rapidité de calcul, cette relation ne sert que pour le calcul du champ \mathbf{B}_k sur la surface \mathcal{S} . On obtient alors une condition aux limites de Dirichlet qui permet d'obtenir le champ dans tout le volume en inversant la relation $\Delta \mathbf{B}_k = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1})$.

Considérations pratiques :

* Avec ce schéma de résolution, le calcul des coefficients \mathbf{B}_k est fait à $R_m = 1$. Pour ce faire, on choisit dans la pratique $R = 1$, $\max(|\mathbf{V}|) = 1$ et $\lambda = 1$ lors de la résolution. Puisque de plus l'équation d'induction est linéaire en \mathbf{B}_0 , tous les coefficients sont proportionnels à B_0 et nous faisons le calcul pour $\max(|\mathbf{B}_0|) = 1$. Une fois fixé le champ de vitesse, l'amplitude du champ appliqué et R_m sont donc les deux seuls paramètres ajustables de la simulation et interviennent après le calcul des coefficients.

* La résolution nécessite la résolution d'équations de Poisson avec conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann. Pour éviter les problèmes de divergences en $r = 0$, nous résolvons alors ces équations sur une grille mixte (cartésienne au centre et cylindrique sur l'extérieur, étirée ou non), avec la bibliothèque Overture [48], qui permet d'utiliser toute une gamme de Poisson solvers utilisant (entre autres) la méthode des différences finies.

* Bien sûr, dans la pratique, il faut tronquer la série. Nous choisissons l'ordre de troncature N de l'ordre de 40, ce qui garantit que sur l'ensemble du disque de convergence ($R_m \leq R_m^*$) la différence relative entre la série obtenue à l'ordre N et la série tronquée à un ordre N' soit inférieur à $1/1000$.

* Au delà de R_m^* , nous étendrons le domaine de convergence à l'aide de la méthode de Padé [83], qui suppose que la série est le développement en série d'une fraction rationnelle. Si M. Bourgoïn a prouvé que cette approche donne des résultats excellents lorsqu'on

s'intéresse au mécanisme d'expulsion, nous garderons à l'esprit que cette méthode un peu magique n'est basée (pour l'instant ?) sur aucun théorème général permettant de décider si le prolongement est licite ou non. Nous tenterons donc de rester critiques vis-à-vis du résultat obtenu, surtout lors de la confrontation avec les données expérimentales de VKS2.

II.4.2 Recherche d'un bouclage et lien avec la dynamo cinématique

Nous avons montré qu'on pouvait calculer le champ induit à l'ordre k en connaissant le champ à l'ordre $k - 1$. En définissant l'opérateur $\mathcal{L} = -\Delta^{-1}\nabla \times (\mathbf{V} \times \bullet) + \text{C.L.}$, nous pouvons écrire formellement la relation liant \mathbf{B}_{k-1} à \mathbf{B}_k sous la forme

$$\mathbf{B}_k = \mathcal{L}\mathbf{B}_{k-1}. \quad (\text{II.48})$$

Nous serons amenés à rencontrer des situations, dans la dernière partie de ce manuscrit, pour lesquelles le champ induit à l'ordre $k - 1$ sera un vecteur propre de \mathcal{L} . On aura alors la condition que nous appellerons de bouclage

$$\mathbf{B}_k = \gamma \mathbf{B}_{k-1} \Leftrightarrow \mathcal{L}\mathbf{B}_{k-1} = \gamma \mathbf{B}_{k-1}. \quad (\text{II.49})$$

Deux situations sont alors possibles selon le signe de γ :

- * si γ est négatif, le bouclage est dit antidynamo puisqu'en ajoutant un terme supplémentaire à la série, on diminue le champ total.
- * Si γ est positif, alors le champ \mathbf{B}_k obtenu par application de l'opérateur \mathcal{L} est aligné avec \mathbf{B}_{k-1} et de même sens. Dans une telle situation, le champ \mathbf{B}_{k-1} est solution de l'équation

$$\Delta \mathbf{B}_{k-1} + \frac{1}{\gamma} \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{k-1}) = 0. \quad (\text{II.50})$$

Ce qui montre que ce champ magnétique n'est autre que le mode neutre obtenu par étude de stabilité linéaire (mode pour lequel on a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r})e^{pt}$ avec $p = 0$). Ce bouclage sera alors appelé dynamo et sera associé au seuil $R_m^c = 1/\gamma$.

Remarque : Il est très rare de trouver un mode dynamo par itérations successives, et nous serons plutôt amenés à rencontrer des cas pour lesquels on a un bouclage positif en deux itérations. On a alors $\mathbf{B}_{k+2} = \gamma \mathbf{B}_k$ avec $\gamma \geq 0$. Le sous-espace engendré par la famille $(\mathbf{B}_k, \mathbf{B}_{k+1})$ est alors stable par l'opérateur \mathcal{L} et le vecteur $\mathbf{B}_d = \sqrt{\gamma} \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_{k+1}$ est un vecteur propre dynamo avec le seuil $R_m^c = 1/\sqrt{\gamma}$. Dans le cas d'un bouclage positif en deux étapes, on peut donc construire un mode propre de \mathcal{L} qui donne un bouclage positif en une seule itération. Ce résultat s'étend comme suit : si pour un champ magnétique \mathbf{B} , le plus petit entier n tel que l'on ait $\mathcal{L}^n \mathbf{B} = \gamma \mathbf{B}$ donne une valeur propre γ positive, alors on peut construire un vecteur propre de \mathcal{L} associé à un bouclage dynamo [13, 15].

Chapitre III

Dispositifs expérimentaux

Les résultats expérimentaux décrits dans la seconde partie du manuscrit ont été obtenus à l'aide de trois dispositifs (VKG à Lyon, VKS2 à Cadarache, et l'expérience du tore à Perm). J'ai donc participé à de nombreuses campagnes de mesures, pour lesquelles la configuration expérimentale précise du dispositif utilisé dépend des effets qu'on cherche à étudier (réponse moyenne, effets des petites échelles, fluctuations aux grandes échelles). C'est donc dans un souci de lisibilité que nous avons choisi de regrouper dans un même chapitre les descriptions des dispositifs expérimentaux, ainsi que celles des écoulements utilisés. Une description exhaustive pouvant rendre l'ensemble un peu lourd, nous avons tenté de dégager les caractéristiques générales de chaque dispositif, et donnerons les détails subtils de chacune des configurations dans les chapitres correspondants.

III.1 L'écoulement expérimental de von Kármán

Nous avons étudié les mécanismes d'induction dans des écoulements pour lesquels le fluide est contenu dans une cuve cylindrique fermée, entre deux disques coaxiaux mis en rotation par des moteurs (figure III.1). Ils appartiennent à la classe des écoulements de von Kármán qui partagent la propriété de pouvoir fournir des écoulement turbulents dans un montage de laboratoire. Plus précisément, lorsque les disques sont munis de pales et donc que l'entraînement du fluide est inertiel, il est possible selon la configuration étudiée d'atteindre des nombres de Reynolds cinétiques de l'ordre de 10^6 , ce qui assure d'être dans les régimes de turbulence pleinement développée. Ces écoulements ont donc eu un fort succès auprès de la communauté de la turbulence dans les années 1990 – 2000, et ont été largement étudiés tant à l'ENS de Lyon [36, 65], que dans d'autres laboratoires [26, 33]. Ce n'est toutefois pas leurs propriétés de turbulence, mais la structure des écoulements moyens qu'ils permettent d'obtenir, qui possèdent de l'hélicité et de la rotation différentielle, qui les rend particulièrement intéressants dans le cadre de l'instabilité dynamo.

III.1.1 Propriétés de l'écoulement moyen

Lorsque la vitesse de rotation des disques, appelée Ω , est constante dans le temps, la structure moyenne de l'écoulement présente deux configurations très différentes selon qu'un seul disque est en rotation (figure III.2 (a)) ou que les deux disques tournent à des fréquences identiques mais en sens contraire (III.2 (b)).

- **Un seul disque en rotation, écoulement $s_1 t_1$:** Dans ce cas, le disque (celui du bas sur la figure) impose un mouvement azimuthal, alors qu'à l'opposé de la cuve, l'autre

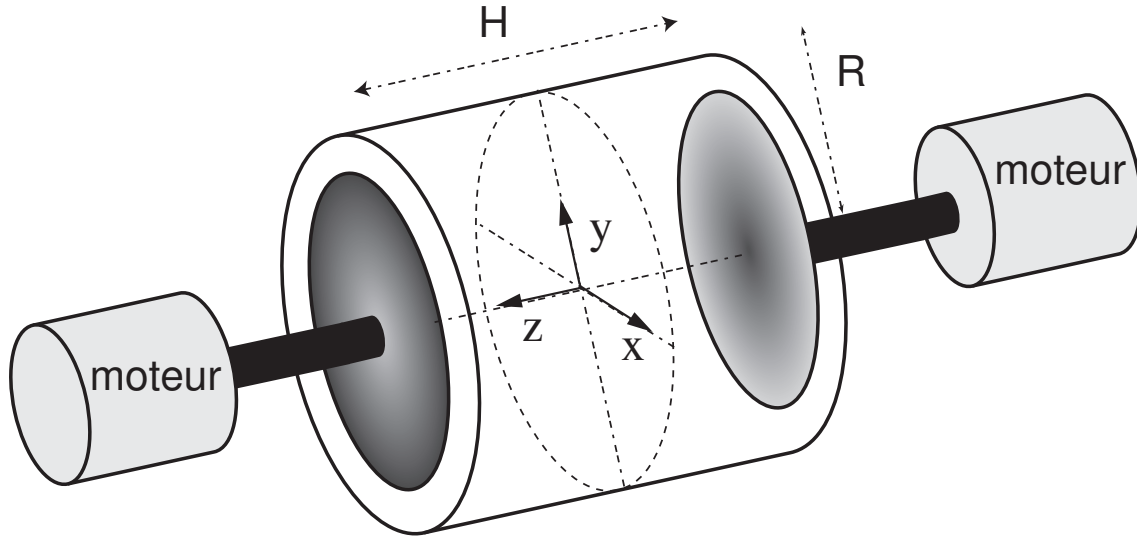


Fig. III.1: Dispositif type d'une expérience de von Kármán en géométrie cylindrique. Le fluide est contenu dans une enceinte cylindrique de longueur H et de rayon R . Le fluide est entraîné de manière inertielle par deux disques coaxiaux, munis de pales, dont la rotation est assurée par des moteurs asynchrones asservis en vitesse.

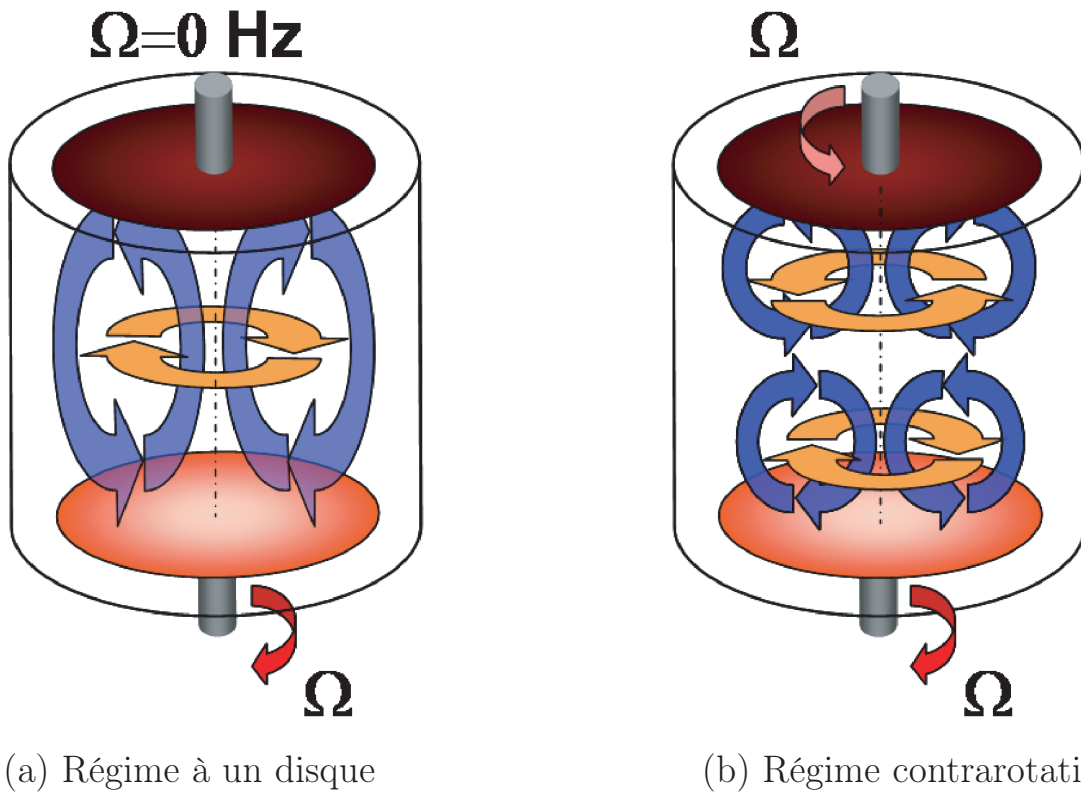


Fig. III.2: Aspect schématique de l'écoulement moyen pour la configuration $s_1 t_1$ obtenue lorsqu'un seul disque est en rotation (figure (a)), et pour la configuration $s_2 t_2$ obtenue pour deux disques contrarotatifs (figure (b)).

disque impose une vitesse nulle. L'écoulement moyen possède alors une large composante dite toroïdale, qui est quasiment constante sur la hauteur de la cuve, et décroît vers zéro dans une zone proche du disque au repos. Si la présence de pales sur les disques (figure III.4) assure un meilleur entraînement du fluide, elle lui impose aussi d'être éjecté radialement au niveau du disque, ce qui crée un écoulement axial appelé pompage (ou encore recirculation centrifuge). Au voisinage de l'axe, celui-ci est toujours dirigé du disque le plus lent vers le disque le plus rapide, et la présence des parois lui impose de boucler à l'intérieur de la cuve. Cet écoulement dit poloïdal possède donc une structure organisée sur un tore. L'écoulement à 1 disque possède une structure de type s_1t_1 dans la terminologie de Dudley & James, et possède une forte hélicité cinétique $\mathcal{H} = \int \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V} d^3\mathbf{r}$. Nous montrons en figures III.3 (a),(b) une coupe $\theta = \text{cte}$ de l'écoulement mesuré dans l'expérience VKE (Von Kármán Eau) du groupe de F. Daviaud au CEA de Saclay. Ce champ de vitesse a été obtenu pour une rotation positive d'un disque à pales courbes nommé TM60, dont nous montrons une photographie en figure III.4 (c).

Propriétés de symétrie :

Les propriétés de symétrie de l'écoulement à 1 disque en rotation sont résumées dans le tableau III.1. Nous avons utilisé la configuration "disque droit, $\Omega > 0$ " comme convention pour définir un écoulement de pompage \mathbf{V}_P positif et de composante toroïdale \mathbf{V}_T positive.

- Effet d'un changement de sens de rotation : Lorsqu'on renverse la fréquence de rotation, on renverse par construction la vitesse toroïdale $\mathbf{V}_T = V_T \mathbf{e}_\theta$ sans changer l'écoulement poloïdal \mathbf{V}_P . Il en résulte que le signe de l'hélicité dépend du signe de la fréquence de rotation. Nous définissons une rotation positive selon la convention de la figure III.4 (c). Elle correspond à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur placé derrière le moteur correspondant. L'hélicité \mathcal{H} est donc négative lorsque Ω est positif, alors qu'elle est positive lorsque Ω est négatif.

- Effet d'un changement de disque : Lorsqu'on passe d'une rotation positive du disque 1 à une rotation positive du disque 2, on change à la fois le signe de \mathbf{V}_T et celui de \mathbf{V}_P . Par conséquent, cette transformation qui est équivalente à une rotation d'angle π autour de Oy se traduit par le changement $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ et l'hélicité demeure inchangée.

- **Deux disques en contrarotation, écoulement s_2t_2 :** Dans ce régime les disques tournent à la même fréquence Ω mais en sens opposé l'un par rapport à l'autre (leur fréquence comme définie plus haut est donc de même signe). Il en résulte un fort cisaillement dans le plan médian puisque les deux disques tendent chacun à imposer une vitesse toroïdale en sens contraire. Chaque disque éjectant le fluide radialement, il existe aussi un pompage centrifuge vers le centre de chaque disque, qui se renverse de part et d'autre du plan médian. L'écoulement possède une structure voisine de la configuration s_2t_2 , et est constitué de deux cellules hélicitaires en contrarotation de part et d'autre du plan médian (figure III.2 (b)). Chaque cellule étant équivalente à la rotation d'un seul des deux disques avec une fréquence de signe identique, les hélicités de chaque cellule sont identiques et l'écoulement moyen possède à la fois de la rotation différentielle et de l'hélicité. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe II.2.4, ces deux propriétés en font un bon candidat

Fréquence	configuration	Écoulement	Hélicité	Rotation différentielle
$\Omega > 0$	Disque droit	$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T$	$\mathcal{H} < 0$	non
$\Omega < 0$	Disque droit	$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_T$	$\mathcal{H} > 0$	non
$\Omega > 0$	Disque gauche	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}_P - \mathbf{V}_T$	$\mathcal{H} < 0$	non
$\Omega < 0$	Disque gauche	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T$	$\mathcal{H} > 0$	non
$\Omega > 0$	Deux disques	$\mathbf{V}_{2d} = \mathbf{V}_P^{2d} + \mathbf{V}_T^{2d}$	$\mathcal{H} < 0$	$\mathbf{V}_T^{2d}(-z) = -\mathbf{V}_T^{2d}(z)$
$\Omega < 0$	Deux disques	$\mathbf{V}_{2d} = \mathbf{V}_P^{2d} - \mathbf{V}_T^{2d}$	$\mathcal{H} > 0$	$\mathbf{V}_T^{2d}(-\Omega) = -\mathbf{V}_T^{2d}(\Omega)$

Tab. III.1: Symétries des écoulements à 1 disque, et à deux disques en contrarotation lors d'un renversement du sens de rotation Ω et dans un changement de disque. La convention utilisée pour définir une rotation positive est celle de la figure III.4.

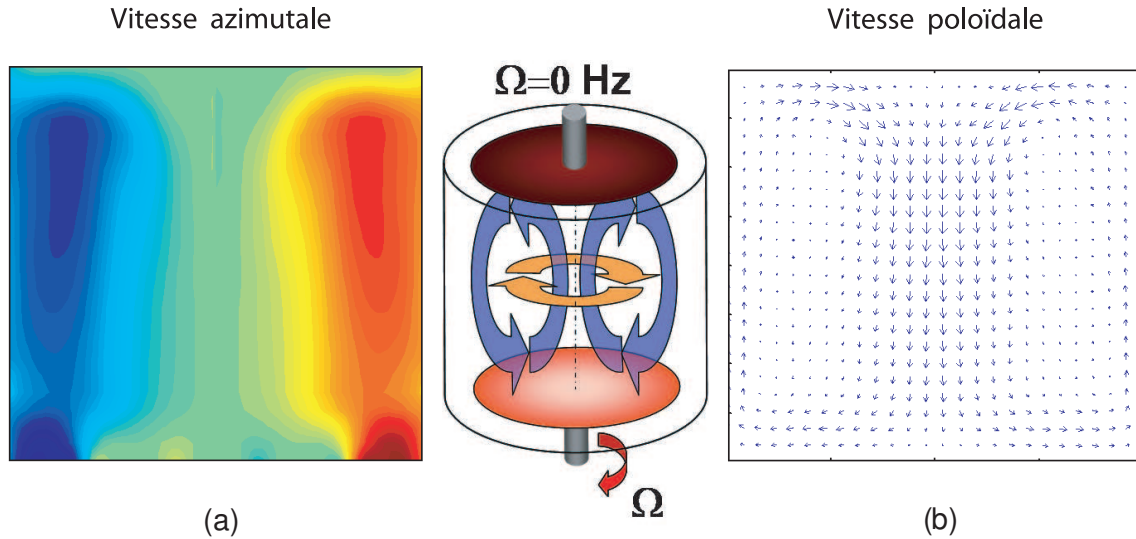
pour l'observation de l'effet dynamo. Nous montrons en figure III.3 (c),(d) une coupe expérimentale de l'écoulement obtenu avec les disques de la figure III.4 (c) tournant en contrarotation en sens positif. Nous observons que le gradient du pompage et le gradient de rotation ne sont pas localisés dans une couche limite au voisinage du plan médian, mais sont répartis dans un volume équivalent au tiers du volume total.

Propriétés de symétrie (tableau III.1) : Lorsqu'on renverse la fréquence de rotation, on ne change pas l'écoulement poloïdal mais on renverse la vitesse toroïdale $\mathbf{V}_T = V_T \mathbf{e}_\theta$. L'hélicité de l'écoulement contrarotatif dépend donc aussi du sens de rotation : elle est négative pour une rotation positive, et positive pour une rotation négative.

Optimisation de l'écoulement moyen : si tous les écoulements de von Kármán possèdent les caractéristiques communes d'être composés de deux composantes, poloïdale et toroïdale, la topologie, ainsi que l'amplitude du champ de vitesse dépendent fortement du rapport d'aspect H/R du cylindre et de la nature des disques utilisés. Ces derniers peuvent avoir une taille variable et posséder des pales droites comme dans le cas de l'expérience von Kármán gallium (VKG), ou des pales courbes comme dans le cas des dispositifs von Kármán sodium (VKS1 et VKS2). Le changement de courbure permet de faire varier la position des boucles de recirculation, la répartition des gradients de rotation, ainsi que le paramètre " P/T " qui représente le rapport des amplitudes de \mathbf{V}^P à \mathbf{V}^T . L'influence de ces paramètres sur le seuil de l'instabilité dynamo est très grande puisque le champ de vitesse obtenu avec les disques TM80 (pales droites, figure III.4 (a)) ne permet pas d'observer numériquement l'instabilité dynamo, alors que les disques appelés TM73 (VKS2, figure III.4 (b)) permettent de l'observer quand ils tournent en contrarotation dans le sens positif. Il a par ailleurs été montré [87] que les disques TM73 permettent d'obtenir le seuil le plus faible ($R_m^c = 43$) lorsqu'on entoure l'écoulement d'une épaisseur de sodium au repos.

Remarque : Il est à noter que dans le cas de pales courbes, l'écoulement engendré par une rotation positive (contrarotation) n'est pas identique à celui engendré par une rotation négative (anti contrarotation). En effet, dans ce second cas, l'amplitude de la composante de rotation \mathbf{V}^T est beaucoup plus grande alors que la recirculation est moins intense. Pour

Un disque en rotation



Contrarotation

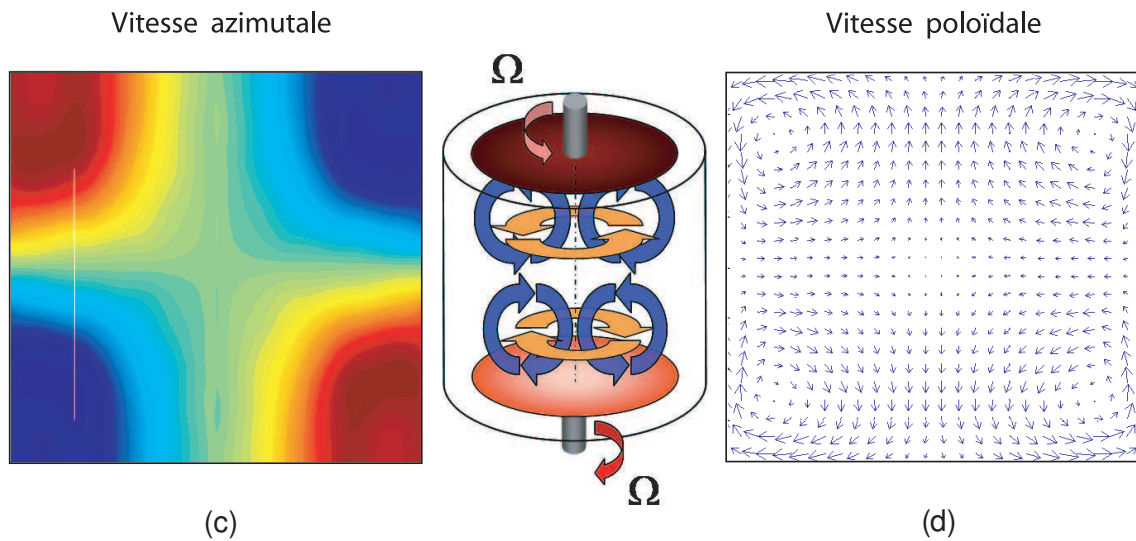


Fig. III.3: Coupe dans un plan $\theta = \text{cte}$ du champ de vitesse moyen (supposé axisymétrique) de von Kármán mesuré par vélocimétrie LASER Doppler dans le cas de disques TM60 (L. Marié (2003), [60, 59]). Figures (a),(c) composante azimutale de la vitesse dans le cas du régime à 1 disque (figure (a)) et du régime à deux disques (figure (c)). Les coupes vectorielles (figures (b), (d)) représentent les composantes axiale et radiale de la vitesse poloïdale.

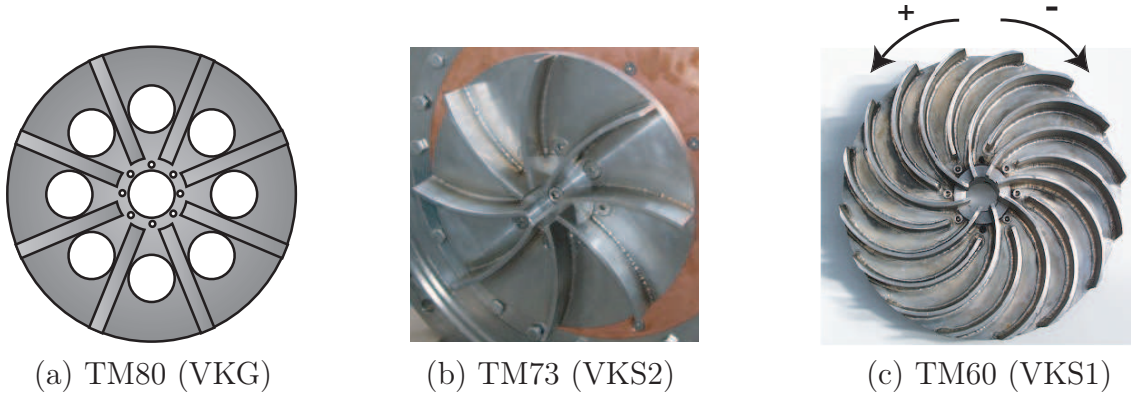


Fig. III.4: Disques utilisés dans les différentes expériences. Figure (a) : disques TM80 à pales droites, dispositif VKG. Figure (b) : disques TM73 à courbure optimale, dispositif VKS2. Figure (c) : disques TM60, dispositif VKS1.

ce types de disques, le tableau III.1 ne donne qu'une indication du signe des composantes \mathbf{V}^P et \mathbf{V}^T , et ne nous permettra pas une exploitation quantitative des symétries pour l'analyse des mesures de champ induit avec le dispositif VKS2. En revanche, l'expérience VKG qui n'utilise que des disques à pales droites TM80, ne possède pas cette inconvénient. Nous utiliserons donc les propriétés de symétrie résumées dans le tableau III.1 pour analyser les mesures d'induction obtenues avec ce dispositif.

Évolution avec le nombre de Reynolds L'utilisation de disques à pales assure un entraînement suffisamment bon pour que la vitesse maximale du fluide soit proche de la vitesse des disques. Le nombre de Reynolds cinétique $Re = 2\pi R^2 \Omega / \nu$ de l'écoulement est donc toujours de l'ordre de 10^6 , ce qui assure qu'on soit dans un régime pleinement turbulent dès les basses vitesses. Dans ce cas, du fait de l'entraînement inertiel, la forme de l'écoulement moyen ne dépend plus ni de la fréquence de rotation, ni de la viscosité du fluide considéré. Ce résultat a été montré par F. Ravelet, qui a comparé les champs de vitesse expérimentaux pour différentes vitesses, et différentes viscosités d'un mélange eau-glycérol. On pourra donc considérer dans toute la suite que la géométrie de l'écoulement moyen est fixée mais que son amplitude est directement proportionnelle à la fréquence de rotation Ω .

III.1.2 Propriétés turbulentes de l'écoulement de von Kármán

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'induction ne présente des régimes non linéaires intéressants que dans la mesure où R_m est au moins de l'ordre de l'unité. Or l'utilisation de métaux liquides impose que le nombre de Reynolds magnétique R_m soit proportionnel au nombre de Reynolds cinétique Re , et que ce coefficient de proportionnalité appelé nombre de Prantl magnétique $P_m = R_m / Re$ soit de l'ordre de 10^{-6} . Les écoulements utilisés présentent donc des fluctuations turbulentes, avec un taux de turbulence (rapport entre la valeur rms de la vitesse et sa valeur moyenne) qui peut atteindre 30 – 40% [65]. Cette turbulence est par ailleurs pleinement développée, ce qui implique la présence d'une large gamme d'échelles temporelles associées à l'existence d'un régime inertiel pour les fluctuations de vitesse [80, 62], ainsi que la présence d'intermit-

tence dans la dynamique de l'écoulement [33, 36, 26].

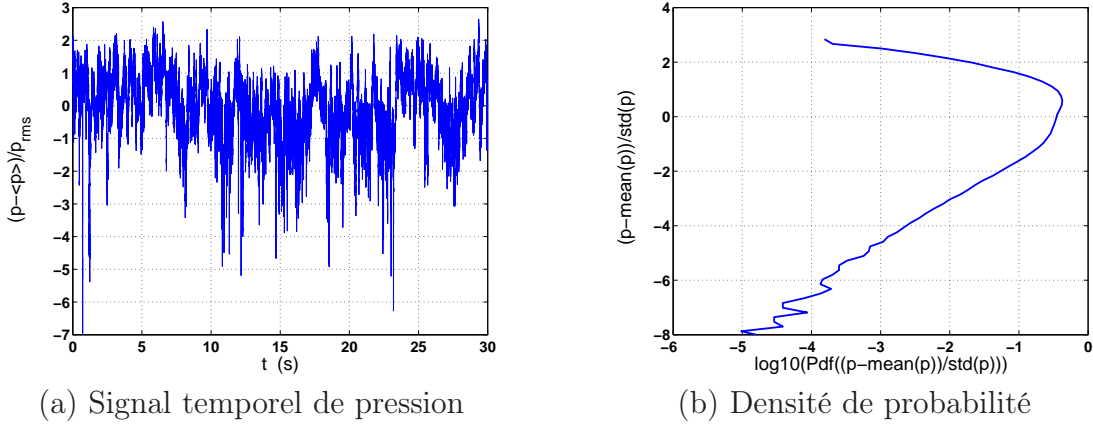


Fig. III.5: Fluctuations turbulentes de pression. Les mesures ont été obtenues dans l'expérience VKG utilisant des disques TM80 en contrarotation à 10 Hz. Le capteur est en paroi au niveau du plan médian.

Si les mesures de vitesse ne sont pas possibles dans les dispositifs expérimentaux que nous utilisons, nous pouvons illustrer ce caractère turbulent à l'aide des mesures de pression faites en paroi dans le plan médian. Pour cela nous avons représenté en figure III.5 (a) l'évolution temporelle de la pression dans le cas de l'écoulement de gallium contrarotatif avec une fréquence de rotation $\Omega = 10$ Hz. Le signal de pression présente de larges fluctuations très rapides, ainsi que des événements négatifs très violents qui apparaissent plus clairement lorsqu'on trace la densité de probabilité réduite et centrée (figure (b)) associée à la série temporelle de la figure (a). Nous observons que la probabilité de ces dépressions intenses, qui correspondent aux larges déviations négatives de la PDF, n'est pas gaussienne. Elle affecte plutôt une forme exponentielle aux larges déviations, ce qui est caractéristique de la dynamique intermittente des filaments de vorticité [33, 36]. Nous retrouvons le caractère turbulent de l'écoulement lorsqu'on représente la densité de puissance \tilde{p}^2 par unité de fréquence du signal de pression représenté en figure III.6 (a). Les fluctuations contiennent de l'énergie dans une large gamme de fréquences qui s'étend depuis $\Omega/100$ jusqu'à des fréquences supérieures à 100 Ω (la coupure à 1 kHz, très inférieure à la fréquence de Kolmogorov $f_K \sim 100$ kHz est due au filtre anti-repliement de la carte d'acquisition). Comme on peut le constater, dans le cas de l'écoulement de gallium engendré à l'aide de disques à pales, il n'est pas possible d'identifier clairement un régime inertiel dans le domaine des hautes fréquences présentant le comportement en loi de puissance attendu [11] de type $\tilde{p}^2 \sim f^{-\frac{7}{3}}$. Cet écart peut être causé par la présence de bulles de cavitation au sein du fluide. L'origine de celles-ci réside dans l'utilisation de pales, qui sont efficaces pour obtenir de fortes vitesses de rotation $V \sim R\Omega$ au sein d'un fluide de grande masse volumique ($\rho_{\text{gallium}} = 6.1\rho_{\text{eau}}$). L'ensemble produit en effet de fortes différences de pression $\Delta P \sim \rho R^2 \Omega^2$ entre l'axe de rotation et le bord de cuve, ce qui permet au gallium de se vaporiser au centre des vortex.

Comme l'écoulement est pleinement turbulent, la puissance consommée par les moteurs pour assurer l'entraînement du fluide doit varier comme le cube de la vitesse. La figure III.6 (b), qui représente la consommation électrique typique en fonction de Ω^3 pour l' p rience

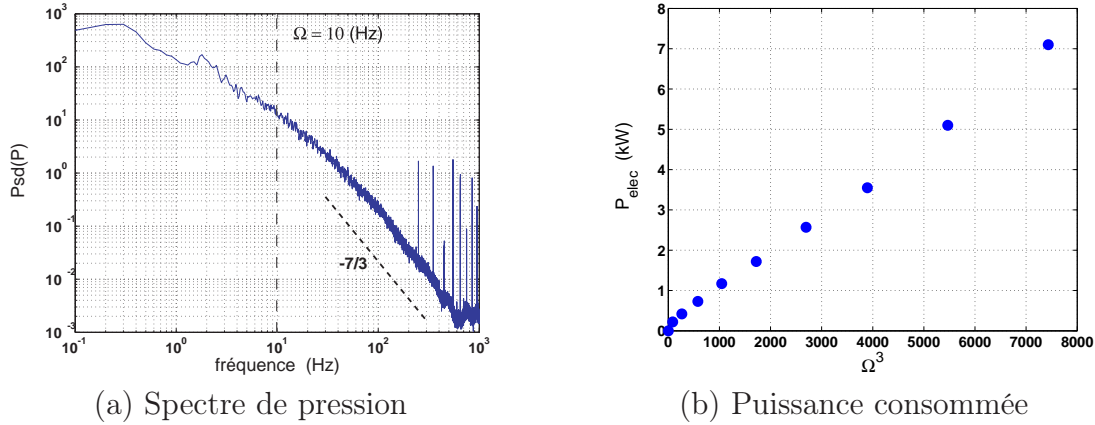


Fig. III.6: Figure (a) Spectre de pression obtenu en paroi dans l'expérience VKG pour une contrarotation exacte à une fréquence $\Omega = 10$ Hz. Figure (b) Évolution de la puissance électrique consommée par l'un des moteurs en contrarotation dans VKG en fonction du cube de la vitesse.

au gallium en régime contrarotatif, montre que la puissance varie bien linéairement en fonction de Ω^3 dès que la vitesse est suffisamment grande pour que la puissance électrique soit une image fiable de la puissance mécanique fournie au fluide. Notant R le rayon, Ω la fréquence et ρ la densité, on retrouve alors la loi d'échelle caractéristique du régime turbulent [65]

$$P = K_p \rho R^5 \Omega^3, \quad (\text{III.1})$$

où K_p est une constante sans dimension caractéristique de la géométrie du montage et de la forme des pales utilisées. Elle vaut 17.6 dans le cas de VKG [13, 60], et 13.4 pour une contrarotation positive dans la configuration VKS2a qui utilise une couche de sodium au repos [87].

Évolution lente : une des caractéristiques de l'écoulement de von Kármán contrarotatif réside dans la présence d'énergie dans les basses fréquences de l'écoulement. Ces fluctuations de l'écoulement à grande échelle, qui correspondent à la partie $f < \Omega$ du spectre de pression, sont associées au fort cisaillement de la couche de mélange [60]. Celui-ci se traduit notamment par la formation de vortex radiaux (figure III.7 (b)) dont le temps de vie est de l'ordre du temps de rotation $1/\Omega$. Cette dynamique basse fréquence est complexe et peut posséder un comportement oscillatoire, ou encore chaotique, en fonction des caractéristiques géométriques du montage utilisé. Comme le montrent les figures III.7 (a),(b) et (c), qui présentent une visualisation de l'écoulement en eau en présence de bulles pour différents temps de pause de l'appareil photographique, la structure de l'écoulement est différente selon la durée utilisée pour évaluer la moyenne temporelle. Aux temps courts, la structure de l'écoulement montre essentiellement des fluctuations aux petites échelles (turbulence), aux temps intermédiaires elle présente des structures d'une taille comparable au rayon de la cuve, et aux temps infiniment longs elle est organisée selon l'illustration de la figure III.7 (c).

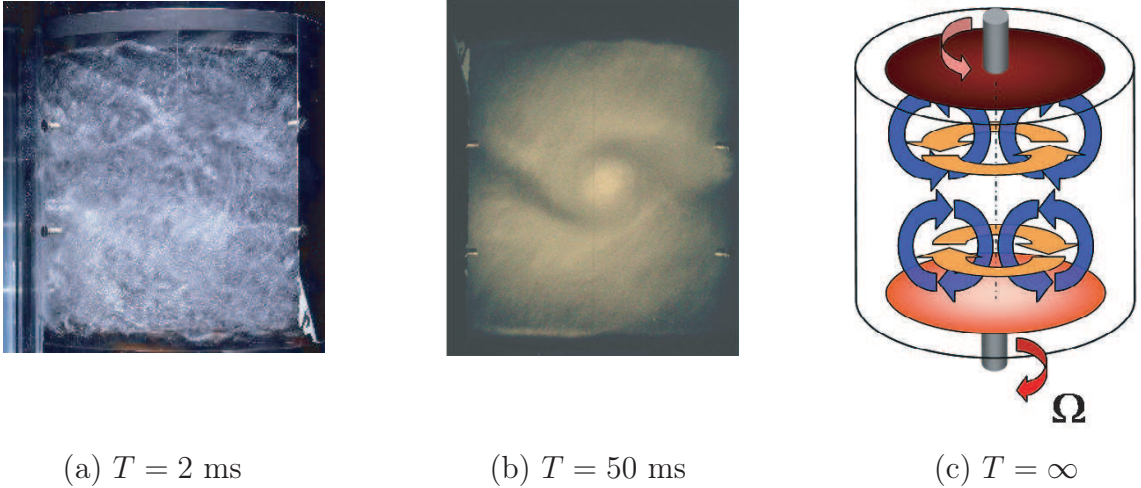


Fig. III.7: Visualisation de l'écoulement de contrarotation (cliché CEA Saclay) à l'aide de bulles, et pour différents temps de pose T . Figure (a) $T = 1/500 \text{ s}$. Figure (b) $T = 1/20 \text{ s}$. Figure (c) dessin d'artiste de l'écoulement moyen ($T = \infty$).

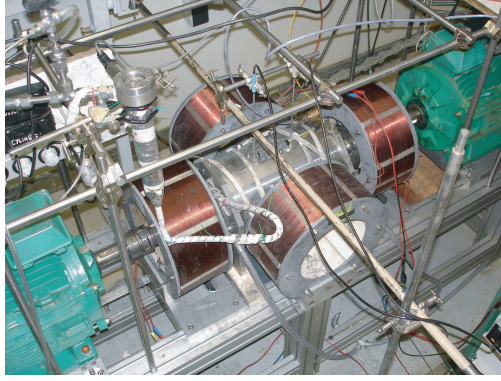
III.1.3 Conclusion sur les propriétés des écoulements de von Kármán

Il ressort de cet exposé des propriétés de l'écoulement de von Kármán contrarotatif, que nous allons être amenés dans la suite à étudier les mécanismes d'induction générateurs d'effet dynamo dans un écoulement turbulent, en présence de structures à grande échelle, et qui n'est que rarement voisin de sa structure moyenne. Ce problème complexe soulève naturellement la question de la pertinence d'une approche cinématique qui ne retient que l'écoulement moyenné dans le temps pour évaluer le seuil de la dynamo. En effet, si l'on sait qu'en présence d'un bruit faible, le seuil de l'instabilité ne change qu'au second ordre [78], les études portant sur la modulation de l'écoulement de Ponomarenko [70] ont montré que le seuil de l'instabilité peut être soit abaissé, soit augmenté, selon que la modulation des composantes du champ de vitesse présente un accord de phase ou non.

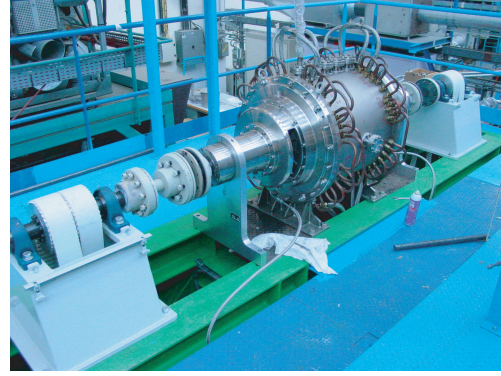
III.2 Les expériences d'induction de von Kármán

III.2.1 Description générale

Les figures III.8 (a),(b) montrent une photographie du dispositif von Kármán gallium (VKG, figure (a)) et du dispositif von Kármán sodium (VKS2, figure (b)). Ces deux expériences ont un aspect similaire : elles sont toutes deux constituées d'une cuve cylindrique dans laquelle les deux disques brassant le fluide sont mis en mouvement par un ensemble de moteurs asynchrones asservis en vitesse. Dans les deux cas, le paramètre de contrôle hydrodynamique est la fréquence de rotation Ω qu'on peut maintenir constante dans l'intervalle $[0 - 30] \text{ Hz}$ à 0.1% près grâce à une boucle de régulation. Dans chacune de ces expériences, l'écoulement moyen dépend de la nature des disques utilisés, mais dans les deux cas l'écoulement est pleinement turbulent et possède toutes les caractéristiques présentées dans la section précédente.



(a) Dispositif VKG



(b) Dispositif VKS2

Fig. III.8: Photographie des dispositifs expérimentaux VKG de Lyon (figure (a)), et VKS2 de Cadarache (figure (b)).

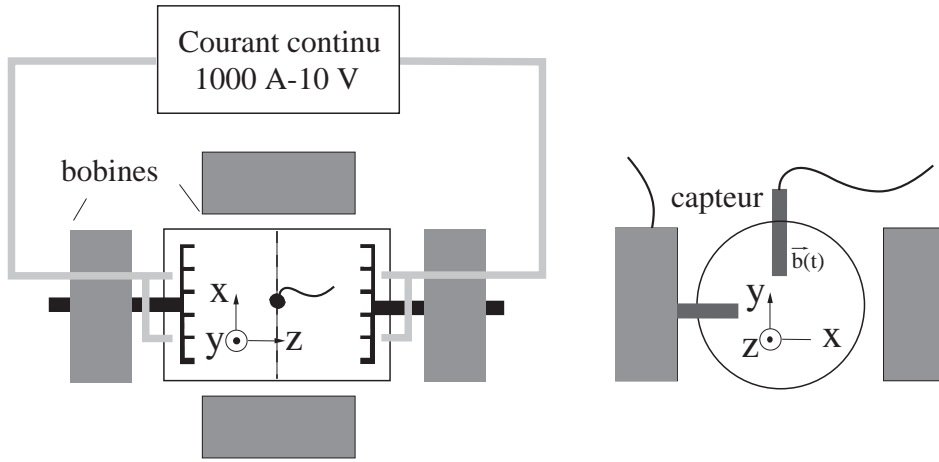


Fig. III.9: Schéma de l'expérience VKG. On distingue les disques coaxiaux à l'intérieur du cylindre, les paires de bobines axiales et transverses servant à produire un champ magnétique homogène et le circuit électrique permettant d'obtenir un courant axial qui traverse le dispositif

• **Expérience VKG de Lyon :** pour l'expérience en gallium, la cuve de rayon intérieur $R = 10$ cm et de hauteur $L = 32$ cm, est en acier inoxydable (trois fois moins conducteur que le gallium). Les disques (figure III.4 (a)) sont munis de 8 pales droites d'une hauteur de 1 cm qui permettent un entraînement inertiel du fluide. Ils sont distants de $H = 20$ cm, ce qui donne un rapport d'aspect $H/R = 2$. Deux moteurs asynchrones (modèle LSMV 160 MR, en vert sur la photo) permettent d'injecter une puissance mécanique maximale de 22 kW dans le volume. Un dispositif de refroidissement, constitué de serpentins situés à l'arrière des disques et dans lesquels circule de l'eau froide permet d'évacuer la puissance injectée, et donc de réguler la température de fonctionnement autour de 40° C.

• **Expérience VKS2 de Cadarache :** l'expérience VKS2 représente la seconde génération d'expérience utilisant le sodium, et constitue donc une évolution du dispositif VKS1 [16, 58, 79]. L'ensemble est constitué d'une cuve en cuivre nickelé de rayon $R_{ext} = 28.9$ cm

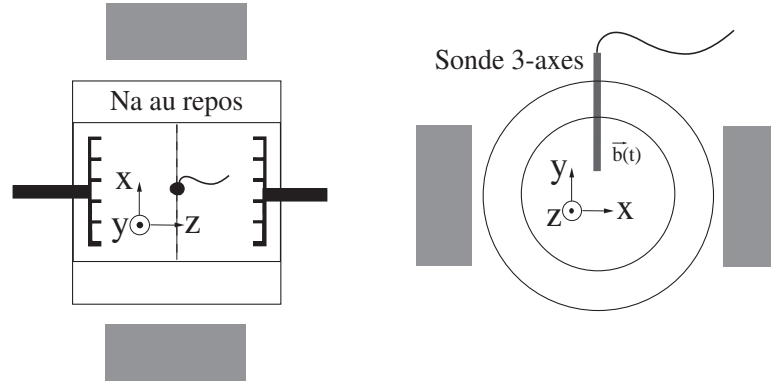


Fig. III.10: Schéma du dispositif VKS2a. Le volume est divisé en deux régions distinctes par une chemise en cuivre. Seule le fluide contenu dans la région interne est mis en mouvement par les disques. Dans la configuration VKS2b, la chemise en cuivre est absente, et c'est l'ensemble du fluide qui est mis en mouvement par les disques.

et de longueur 60.4 cm. Dans la configuration VKS2a, le volume est divisé en deux zones séparées par une chemise en cuivre de rayon interne $R = 20$ cm et d'épaisseur 5 mm (figure III.10). L'ensemble du volume est donc occupé par du sodium liquide, mais seul le fluide situé dans la zone interne est mis en mouvement par deux disques de rayon 15.5 cm à pales courbes TM73 de hauteur 4.1 cm. La distance entre les disques est $H = 42$ cm, ce qui donne un rapport d'aspect voisin de 2 pour l'écoulement. Avec ce nouveau dispositif, le volume occupé par le sodium est donc deux fois plus grand qu'avec le dispositif VKS1 ($H = 40$ cm, $R_{ext} = 20$ cm [13]), ce qui rend la configuration VKS2a équivalente au dispositif VKS1 entouré d'une couche de sodium au repos d'épaisseur $e = 8.4$ cm. Par rapport à VKS1, la puissance mécanique disponible a, elle aussi, été doublée. Chaque disque est mis en mouvement par une paire de moteurs asynchrones (LSMV 280 SP) de 75 kW couplés en structure maître-esclave. Les deux moteurs tournent alors à la même fréquence fixe Ω en se répartissant le couple à fournir. L'ensemble des quatre moteurs permet de fournir une puissance mécanique de 300 kW au fluide.

L'une des grandes améliorations de l'expérience VKS2 par rapport à VKS1 réside dans l'utilisation d'un dispositif de refroidissement pouvant évacuer une puissance maximale de 200 kW. Celui-ci est constitué d'un échangeur thermique SOLEV qui assure une circulation d'huile de débit constant à l'intérieur de la paroi de la cuve en cuivre. L'utilisation de ce refroidisseur permet de travailler à température constante dans la gamme $120 - 130^\circ \text{C}$ jusqu'à des fréquences de rotation de l'ordre de 25 Hz.

Remarque : lors d'une seconde campagne de mesures, en juillet 2005, nous avons utilisé le dispositif dans une seconde configuration nommée VKS2b. Dans cette configuration, il n'y a plus de sodium au repos, et c'est l'ensemble du fluide qui est mis en mouvement par les disques. Nous discuterons des spécificités de chacune des configurations au chapitre VII.

• **Mesure des caractéristiques de l'écoulement :** pour chacune des deux expériences (VKS2 et VKG), il est possible de mesurer la pression, la température du fluide, et la puissance consommée par les moteurs. Ces mesures, qui ne concernent pas directement la dynamique du champ magnétique mais plutôt les grandeurs globales de l'écoulement, sont nécessaires à plusieurs points de vue :

* les mesures de température permettent de surveiller que le fluide utilisé, qui est solide à température ambiante, ne gèle pas. Ceci aurait des conséquences particulièrement fâcheuses dans le cas de VKS2. En effet, les garnitures BURGMANN qui assurent l'étanchéité des passages d'arbre derrière les disques, sont lubrifiées par le sodium liquide. Un gel risquerait donc de les casser ce qui, au delà du prix, imposerait un démontage. Alors qu'avec un peu d'habitude, on peut démonter et remonter seul le dispositif VKG en une journée, une telle opération de maintenance sur l'expérience en sodium procure plusieurs jours de travail en environnement sodé ...

* Une mesure de pression possède le double avantage d'être à la fois une mesure hydrodynamique, et une mesure de surveillance puisqu'elle permet de détecter une éventuelle fuite. De plus, le fluide considéré étant en rotation rapide, il faut lui imposer une pression extérieure pour prévenir la formation de bulles dans l'écoulement.

* Enfin les mesures de puissance permettent de s'assurer que les moteurs travaillent de manière symétrique. En effet, lorsqu'un déséquilibre entre les vitesses des disques apparaît, l'écoulement perd sa structure $s_2 t_2$ et bifurque vers une configuration à une seule cellule qui est proche de la structure $s_1 t_1$.

III.2.2 Mesures du champ magnétique

• **Production d'un champ appliqué homogène :** chacun des deux dispositifs est utilisé en présence d'un champ magnétique imposé par des bobines qu'on peut apercevoir sur les figures III.9 et III.10. Elles sont disposées par paire dans une configuration voisine de la configuration de Helmholtz, et permettent d'obtenir un champ stationnaire. Une alimentation stabilisée KEPCO asservie en courant, qui peut délivrer un courant stable de 8 A sous 50 V, permet d'obtenir un champ imposé d'amplitude typique 25 – 40 G dans le cas de VKG, et d'une amplitude plus faible $B_0 \sim 5$ G dans le cas de VKS2.

• Dans le cas de VKG il est possible de produire un champ magnétique dans deux directions orthogonales. Lorsque le champ est parallèle à l'axe de rotation ($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$), le champ sera dit axial et lorsque le champ sera dirigé dans la direction \mathbf{e}_x , le champ sera dit transverse.

• Dans le cas de VKS, du fait de l'encombrement des arbres moteurs, il n'est pas possible de disposer des bobines créant un champ axial. Les mesures seront faites en configuration transverse uniquement.

• **Production d'un champ appliqué orthoradial :** dans l'expérience VKG nous avons placé des électrodes en laiton à l'arrière des disques (figure III.9) qui sont connectées par des câbles à une alimentation stabilisée POWER-TEN modèle P63D-101000. Celle-ci peut délivrer un courant continu d'intensité 1000 A sous 10 V, ce qui permet d'obtenir un courant axial $\mathbf{J}_0 = J_0(r, z) \mathbf{e}_z$ très intense circulant au travers du fluide. Dans le cylindre, ce courant axial crée donc une composante orthoradiale \mathbf{B}_0^T qui s'écrit, dans l'approximation d'une répartition uniforme des courants :

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \frac{r}{R} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{III.2})$$

En utilisant le courant maximal autorisé par l'alimentation continue, on obtient un champ majoritairement orthoradial d'amplitude 20 G. Du fait de la géométrie du montage, il

subsiste tout de même un champ parasite vertical (selon Oy) que nous n'avons pas pu éliminer. Il est d'amplitude voisine de 1 G et nous verrons son importance dans le chapitre traitant des effets de la turbulence.

• **Mesures de la réponse induite** : pour toutes les expériences, nous avons utilisé une carte d'acquisition National Instrument PXI-4472 ayant 8 entrées différentielles, d'une résolution de 23 bits, et une fréquence d'échantillonnage 100 kHz. A celle-ci est relié le dispositif de mesure de champ magnétique et éventuellement les capteurs de pression et de température.

Expérience VKG : nous avons utilisé plusieurs types de sonde de champ magnétique pour mesurer la réponse induite dans VKG. Les mesures en un point décrites dans les chapitres IV et V ont été obtenues avec un gaussmètre FW-Bell 9953 qui possède trois sorties analogiques $[0 - 10]$ V, et permettent la mesure du champ induit dans la gamme $0 - 300$ G avec une plage de fréquences accessibles $[0 - 400]$ Hz. Nous verrons que celle-ci est suffisamment étendue pour décrire les fluctuations du champ mesuré. Ces sondes étant sensibles aux variations de température, on peut, soit mesurer conjointement la température du fluide pour corriger la valeur du champ mesuré, soit s'assurer que la température varie de moins de 5°C au cours des acquisitions. Pour ces expériences, la sonde est placée dans un doigt de gant de diamètre extérieur 1.2 cm qui plonge dans le fluide, ce qui permet d'enregistrer le champ magnétique en 1 point du plan médian. Il est possible de placer le doigt de gant dans deux positions différentes, horizontale et verticale, notées respectivement 1 et 2 en figure III.11 (a). Dans la première position, on enregistre le champ le long de l'axe Ox , et dans la seconde le long d'un rayon décalé d'un angle de 18.5° par rapport à l'axe Oy . Dans les deux cas on peut faire coulisser la sonde le long d'un rayon pour mesurer le champ à différentes distances de l'axe Oz . Les mesures que nous présenterons ont été obtenues avec deux sondes ne mesurant qu'une seule composante (sondes 1-axe), si bien qu'il n'était possible d'avoir accès qu'à deux composantes au même instant.

Remarque : l'utilisation de cette position décalée par rapport à Oy est uniquement due à la présence, antérieure aux mesures, d'un trou initialement prévu pour des mesures acoustiques. Nous avons choisi pour la solidité de l'ensemble, de ne pas percer de nouveau trou permettant de faire la mesure parallèlement à Oy . Nous verrons cependant que cela complique l'interprétation des résultats expérimentaux.

Pour les mesures de fluctuations exposées au chapitre VI nous avons une nouvelle cuve, fabriquée pour remplacer le premier cylindre devenu vétuste, qui possède des trous décalés de 90° . Celle-ci permet donc de disposer les sondes dans le plan médian parallèlement à l'axe Ox ou à l'axe Oy (figure III.11 (b)). Nous avons alors utilisé une sonde que nous avons développée au laboratoire, qui intègre huit capteurs à effet Hall Sentron 1SA-1M d'une sensibilité 0.03 V/G et de plage de fréquence $[0 - 2]$ kHz. La figure III.12 montre la répartition de ces capteurs. Ils sont disposés le long d'une ligne, et sont distants de 1 cm. On obtient alors la mesure d'une composante du champ induit le long d'un profil, en huit points uniformément répartis entre $r = 1.5$ cm et $r = 8.5$ cm ($R = 10$ cm).

Expérience VKS : Pour l'expérience VKS2, nous avons utilisé le gaussmètre FW-Bell et une sonde à effet Hall permettant de mesurer les trois composantes du champ magnétique

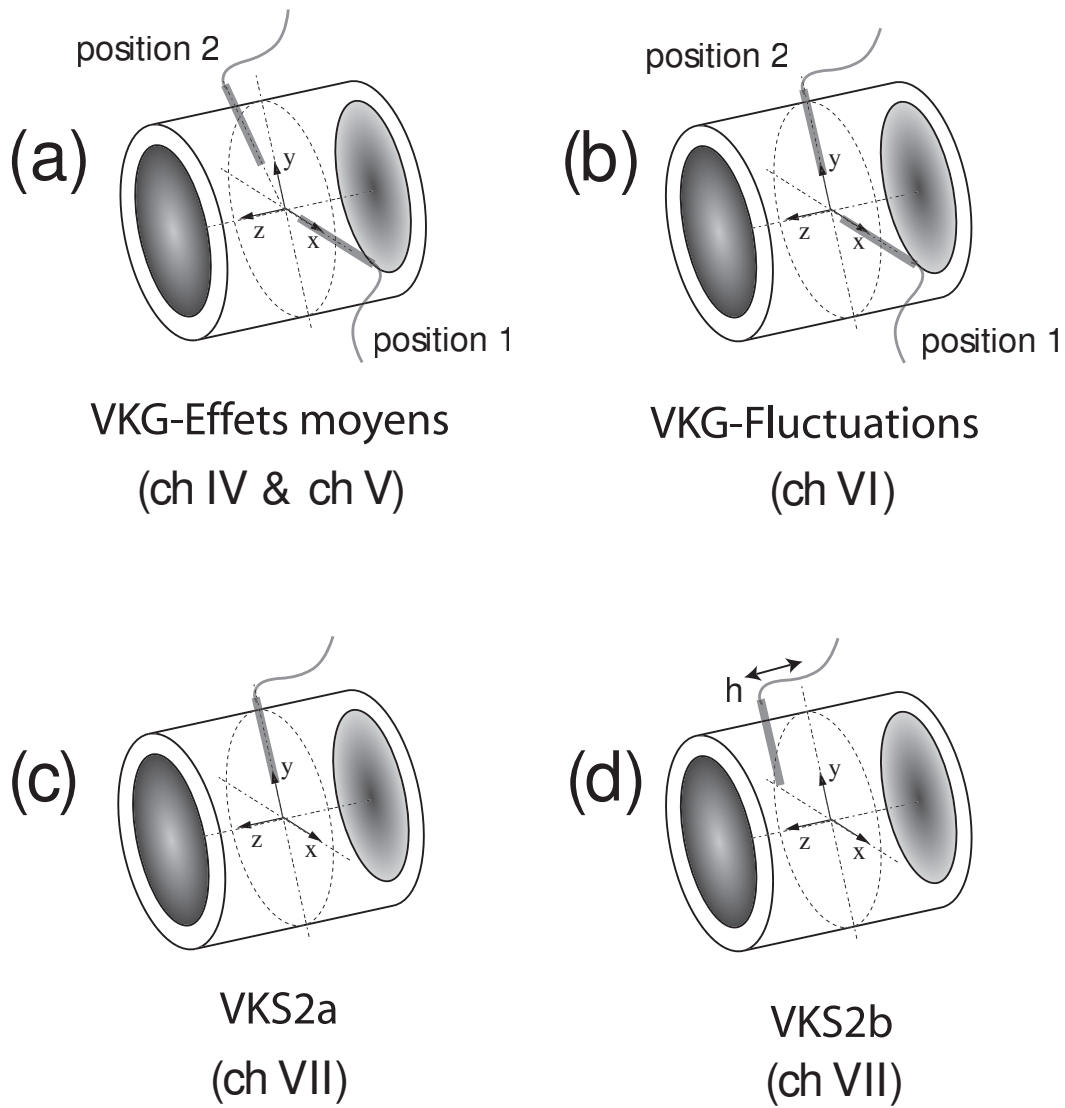


Fig. III.11: Figure (a) et (b) : position des capteurs pour les deux configurations du dispositif VKG. Figures (c) et (d) : position des capteurs dans les configurations VKS2a et VKS2b.

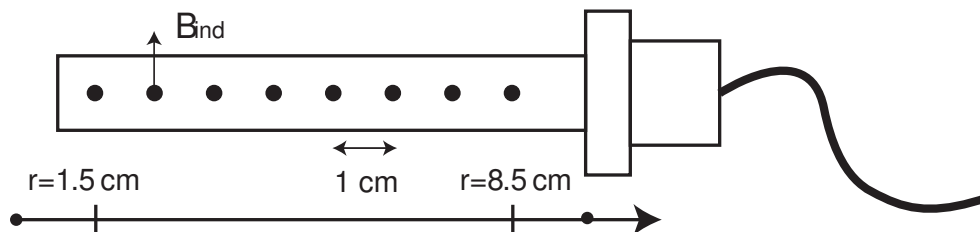


Fig. III.12: Schéma de la sonde multiple utilisée dans l'expérience VKG. La distance entre deux capteurs est de 1 cm et la direction de mesure est indiquée par la flèche verticale.

en un même point de l'espace dans la gamme de fréquences $[0 - 400]$ Hz. Comme cette expérience fonctionne avec du sodium liquide à des températures comprises entre 100 et 150 degrés, et que les capteurs sont détériorés à une température de 70°C , la sonde est incluse dans un doigt de gant muni d'un dispositif de refroidissement à air. Celui-ci utilise une boucle de régulation qui permet de travailler avec une température des capteurs constante et égale à 40°C , à un degré près.

* Configuration VKS2a : dans le cas de cette configuration avec sodium au repos, les mesures décrites ont été faites dans le plan médian à une distance $r = 10 \text{ cm}$ de l'axe Oz , avec la sonde 3-axes disposée parallèlement à la direction Oy (figure III.11 (c)).

* Configuration VKS2b : dans ce cas, nous avons mesuré le champ magnétique dans un plan décalé d'une distance $h = 11 \text{ cm}$ par rapport au plan médian. La sonde est alors encore disposée parallèlement à Oy , et située à une distance $r = 10 \text{ cm}$ de l'axe de rotation (figure III.11 (d)).

III.2.3 Paramètres de contrôle

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, dans le cas d'un champ appliqué \mathbf{B}_0 , le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{ind}$ et le champ de vitesse \mathbf{V} évoluent selon le système d'équations :

$$\text{C.L.} + \begin{cases} \partial_t \mathbf{B}_{ind} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{ind}) + \lambda \Delta \mathbf{B}_{ind} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{V} & \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

On peut alors définir trois nombres sans dimension qui, pour une géométrie et des conditions aux limites données, contrôlent entièrement la dynamique du problème. La définition de ces nombres n'est pas unique, et diffère selon les auteurs ou la nature du problème considéré. Ces nombres sont importants car ils vont nous permettre de situer le régime de fonctionnement des expériences. Notant L et U les échelles de longueur et de vitesse, nous définissons :

- le nombre de Reynolds magnétique qui compare les effets d'induction aux effets de dissipation ohmique.

$$R_m = \frac{UL}{\lambda} \quad (\text{III.4})$$

Nous prendrons la vitesse maximale atteinte par le fluide U_{max} comme échelle de vitesse et le rayon de la cuve R comme échelle de longueur. Comme la vitesse maximale est toujours inférieure à la vitesse des disques $2\pi R\Omega$, il faut prendre en compte l'efficacité de l'entraînement qui dépend de la taille et de la forme des pales. En utilisant le coefficient $\Gamma = U_{max}/2\pi R\Omega$ mesuré dans l'eau au CEA de Saclay, on obtient une nouvelle définition de R_m qui est basée sur les paramètres expérimentaux

$$R_m = \frac{2\pi R^2 \Gamma \Omega}{\lambda}. \quad (\text{III.5})$$

- Le nombre de Prantl magnétique, rapport de la diffusivité électrique à la diffusivité de quantité de mouvement.

$$P_m = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{R_m}{Re}. \quad (\text{III.6})$$

- Le paramètre d'interaction qui compare la force de Laplace aux termes inertiels de l'équation de Navier-Stokes.

$$N = \frac{\mathcal{O}(|\frac{1}{\rho\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0|)}{\mathcal{O}(|(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}|)} = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}. \quad (\text{III.7})$$

Remarque : dans notre définition du paramètre d'interaction, nous avons estimé l'amplitude de la force de Laplace en écrivant

$$\mathbf{F}_L \sim \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}_{ind}) \times \mathbf{B}, \quad (\text{III.8})$$

avec $|\mathbf{B}_{ind}| \sim R_m |\mathbf{B}_0|$. Ceci tient au fait que dans la plupart de nos expériences, le courant \mathbf{J}_0 qui produit le champ \mathbf{B}_0 est nul dans la cuve (il circule dans les bobines). Dans une telle situation, il faut alors estimer l'ordre de grandeur de $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ en utilisant les courants induits. On peut d'ailleurs noter que cette estimation s'applique aussi au cas du champ toroïdal appliqué $\mathbf{B} = B_0 \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta$ pour lequel \mathbf{J}_0 n'est pas nul dans la cuve. Il est en effet possible de montrer, dans ce cas particulier, que la force de Laplace $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0$ s'écrit comme le gradient de l'énergie magnétique. Elle ne cause donc qu'un accroissement de pression et n'est pas source de mouvement.

III.2.4 Régime de fonctionnement des deux dispositifs

Nous rappelons dans le tableau III.2 les principales propriétés physiques du gallium et du sodium que nous utilisons pour estimer les différents nombres sans dimensions des deux dispositifs. Ce tableau montre que le gallium comporte beaucoup d'avantages sur le sodium : il a un point de fusion très bas, est chimiquement très peu réactif, et possède de plus une température d'ébullition très grande qui en empêche l'inhalation (au contraire du mercure). Il apparaît donc comme "le" fluide conducteur qui permet de construire une expérience de MHD souple d'utilisation pour une dangerosité faible (en l'absence de données sur ses effets à long terme sur l'organisme). Toutefois pour une taille d'expérience L fixée, et pour une puissance P disponible, le nombre de Reynolds magnétique accessible est donné par la formule

$$R_m = \mu\sigma \left(\frac{PL}{\rho} \right)^{1/3}. \quad (\text{III.9})$$

Il est donc directement proportionnel à la conductivité, et décroît quand la densité augmente. Le sodium apparaît dès lors être la solution pour obtenir de grands R_m puisqu'il est deux fois plus conducteur pour une densité 6 fois plus faible. Le prix à payer est alors la lourdeur, tant administrative qu'expérimentale, de l'utilisation d'un fluide aussi réactif. Le tableau III.3 résume les caractéristiques principales des dispositifs VKG et VKS ainsi que les nombres sans dimension qui définissent le régime de fonctionnement de ces deux expériences. Nous pouvons voir que si celles-ci sont similaires par leur aspect, elles sont complémentaires. Elles fonctionnent toutes les deux dans un régime d'écoulement pleinement turbulent $Re \sim 10^6$, dans les deux cas, le champ magnétique se comporte comme un vecteur passif, mais elles sont complémentaires du point de vue des régimes MHD explorés. En effet, l'expérience VKG fonctionne dans le régime des $R_m \sim 1$, et permet d'explorer le régime linéaire ou faiblement non linéaire, alors que VKS2 permet, avec une puissance moteur de 300 kW, d'atteindre des R_m de l'ordre de 45, ce qui la situe dans la

	Symbole (unité)	gallium	sodium
Masse volumique	$\rho(\text{kg.m}^{-3})$	$6.1 \cdot 10^3$	$0.92 \cdot 10^3$
Conductivité électrique	$\sigma(\Omega^{-1}\text{m}^{-1})$	$3.9 \cdot 10^6$	$8.3 \cdot 10^6$
Diffusivité magnétique	$\lambda(\text{m}^2.\text{s}^{-1})$	0.21	0.095
Viscosité cinématique	$\nu(\text{m}^2.\text{s}^{-1})$	3.10^{-7}	6.10^{-7}
Point de fusion	$T_f(^{\circ}\text{C})$	29.8	97.8

Tab. III.2: Propriétés physiques du gallium (à 30° C) et du sodium à 150° C

	Symbole (unité)	Dispositif VKG	Dispositif VKS
Rayon	$R(\text{m})$	0.1	0.2
Disques	type, pales	TM80, droites	TM73, courbes
Efficacité	Γ	0.67	0.60
Consommation	K_p	17.6	13.4
Puissance maximale	$P(\text{kW})$	22	300
Fréquence maximale	Ω (Hz)	25	29
T fonctionnement	$T(^{\circ}\text{C})$	40	130
Champ appliqué	$B_0(\text{G})$	30	5
Nombre de Reynolds magnétique	R_m	1 – 5	15 – 50
Paramètre d'interaction	N	$10^{-4} - 10^{-5}$	10^{-5}
Nombre de Prantl magnétique	P_m	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$6.2 \cdot 10^{-6}$
Nombre de Reynolds cinétique	Re	10^6	10^6
Temps de diffusion	$\tau_{\text{diff}} = \frac{R^2}{\lambda}$ (s)	0.05	0.4

Tab. III.3: Nombres sans dimension pour les expériences VKG et VKS2.

gamme des expériences à haut nombre de Reynolds magnétique. C'est d'ailleurs le plus haut R_m actuellement atteint dans une expérience de laboratoire [12, 42, 96, 27].

III.3 Expérience du tore de Perm

Au cours de la thèse, j'ai eu l'occasion de travailler pendant trois mois au sein du groupe d'hydrodynamique dirigé par Peter Frick à l'Institut de Mécanique des Milieux Continus de Perm en Russie. Avec Vitaly Noskov, j'ai alors effectué les mesures d'induction dans le dispositif du tore qui utilise un alliage gallium-indium(10.5%)-étain(2%) comme fluide conducteur. Il ne gèle qu'à 19° C, ce qui peut être utile quand on travaille dans l'Oural, mais est un peu moins conducteur (7%) que le gallium pur.

L'expérience du tore qui utilise un alliage Ga-In-Sn constitue la seconde étape (après étude en eau) d'un projet de plus grande ampleur visant à observer l'effet dynamo dans un écoulement hélicitaire et instationnaire de sodium liquide [40]. La figure III.13 en présente le schéma de principe. Il est basé sur l'action d'un écoulement hélicoïdal instationnaire de type Ponomarenko. Il n'utilise cependant pas la géométrie cylindrique comme l'écoulement

original utilisé à Riga mais une géométrie torique ce qui permet d'obtenir un écoulement hélicitaire bouclé sur lui-même.

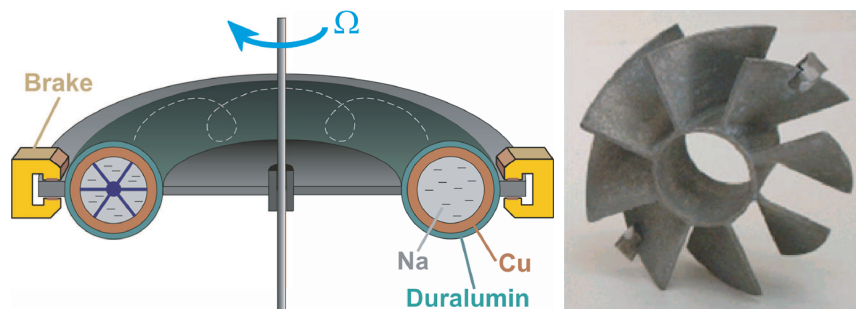


Fig. III.13: Schéma de l'expérience du Tore Figure de gauche : Schéma de la future expérience dynamo de Perm utilisant le sodium comme fluide et un alliage Chrome Cuivre comme matériau. Figure de droite : Diverter droit utilisé lors des expériences en eau.

C'est un écoulement de type "spin-down" qui convertit un mouvement de rotation solide initial en écoulement hélicitaire grâce à l'action de deux hélices fixes appelées diverters. Son mode d'entraînement lui confère donc le double avantage de nécessiter peu d'énergie pour créer le mouvement, ainsi que celui d'éviter la présence d'un arbre moteur qui pose toujours des problèmes en matière d'étanchéité.

Initialement, l'ensemble constitué par le tore, le liquide et les diverters, sont en mouvement de rotation solide, en régime stationnaire à une vitesse angulaire de quelques dizaines de tours par seconde. Une fois le régime stationnaire atteint, on actionne le frein, ce qui stoppe brusquement le tore. Sous l'action de l'inertie, le fluide continue alors sa course le long du tore créant ainsi un écoulement toroïdal. Dans le même temps, les diverters agissent sur cet écoulement principal pour créer l'écoulement hélicitaire. C'est donc un écoulement de type "spin-down" de turbulence en déclin. Une étude de l'optimisation des conditions aux limites [31] a montré qu'il est possible d'observer l'instabilité dynamo dans le sodium pour un coût énergétique de l'ordre de 10 kW.

Dans le cas présent, c'est le caractère instationnaire de l'écoulement qui permet d'espérer atteindre de hauts nombres de Reynolds magnétiques en utilisant peu de puissance mécanique (en comparaison des puissances supérieures à 200 kW qu'il faut fournir pour obtenir l'instabilité dynamo avec une expérience fonctionnant en régime stationnaire).

La figure III.14 montre une photo et un schéma du dispositif expérimental utilisé pour les expériences en gallium. Le tore est constitué d'un matériau isolant électrique, appelé textolite, qui est fixé sur un arbre tournant relié par une courroie à un moteur à courant continu de 6 kW. Ce dernier est asservi en vitesse et permet d'atteindre des fréquences de rotation allant jusqu'à $f = 50$ Hz. Le dispositif de freinage est constitué par un frein à disque de voiture actionné par la chute d'une masse de sable. Initialement cette dernière est accrochée à une potence par l'intermédiaire d'un électroaimant (à droite sur la photographie). Lorsque l'opérateur déclenche le freinage, l'électroaimant est mis hors tension et la chute du sable met en pression le liquide de freins assurant ainsi l'arrêt brutal du tore.

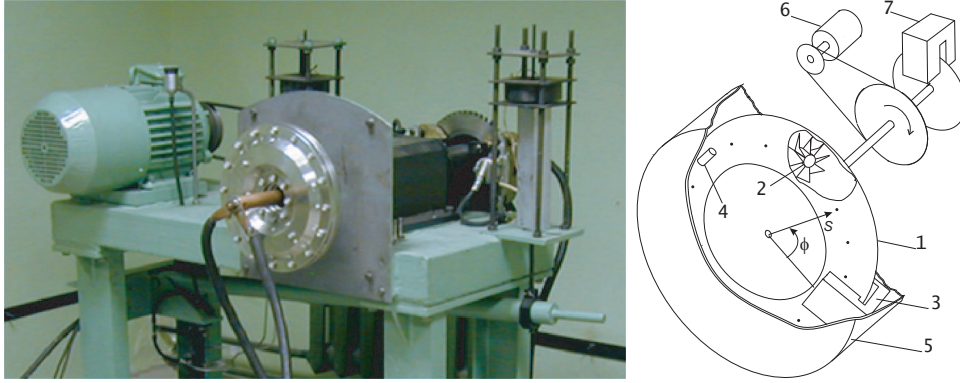


Fig. III.14: Dispositif expérimental de l'expérience de Perm

III.3.1 Mesures expérimentales

Configurations de champ appliqué :

- Champ transverse :** Nous avons tout d'abord étudié la réponse de l'écoulement dans le cas d'un champ imposé parallèlement à l'axe de rotation du tore. Celui-ci est créé par deux bobines coaxiales, de rayon $R_B = 17$ cm, qui sont placées de part et d'autre du plan médian du tore (plan $z = 0$) (figure III.15). Elles sont distantes de $L = 16$ cm et sont donc dans une configuration proche de la configuration de Helmholtz. Nous les avons alimentées à l'aide d'une batterie pouvant délivrer 25 A. L'ensemble (tore+bobines) est placé dans une enceinte de protection en acier (magnétique) qui amplifie un peu le champ appliqué. Dans cette configuration, on obtient un champ d'amplitude 45 G transverse à l'hélice, stable dans le temps, et homogène à 10% près.
- Champ toroïdal :** Pour obtenir un champ toroïdal, nous utilisons un courant électrique axial circulant parallèlement à l'axe de rotation du tore (figure III.16). Pour cela un barreau de cuivre de 1.5 cm de diamètre pour 2 m de long, que l'on peut apercevoir sur la figure III.14, traverse le dispositif de part en part. Nous avons organisé le circuit en deux boucles carrées de 3 m de côté. Elles sont symétriques et disposées dans un plan horizontal, ce qui améliore considérablement la géométrie du champ appliqué par rapport à celui obtenu dans VKG. Chaque boucle de courant est alimentée par une batterie pouvant délivrer 750 A, ce qui permet d'obtenir un champ possédant approximativement la forme recherchée. Il possède une large composante toroïdale de la forme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_\theta$ d'amplitude 30 G à laquelle se superpose une composante non axisymétrique de nombre d'onde $m = 1$. Cette contribution vient du fait qu'on ne peut pas négliger les courants circulant dans les deux boucles. Elle est majoritairement verticale et son amplitude est 3 G. Contrairement au montage précédent, un tel courant circulant dans les câbles dissipe beaucoup d'énergie. Ainsi lors des mesures, les câbles chauffent, et l'augmentation de la résistance du circuit fait chuter le courant dans le circuit. Nous avons donc mesuré le courant circulant dans les bobines avec une pince ampèremétrique, et avons nous veillé à stopper les expériences le temps du refroidissement des câbles lorsque le courant chutait de plus de 10%.

Mesures et système d'acquisition :

- **Champ transverse** : Dans le cas du champ transverse appliqué, nous avons mesuré le champ induit à l'aide des mêmes sondes à effet Hall que celles que nous avons utilisées pour fabriquer la sonde multiple à Lyon. Celles-ci ont une sensibilité de 300 V.T^{-1} dans la gamme de fréquence $[0 - 5] \text{ kHz}$. Nous avons alors mesuré le champ dans le référentiel du laboratoire, avec des sondes fixées au couvercle de protection, et dans le référentiel du tore avec des sondes placées dans le matériau isolant au voisinage du gallium. La résolution du dispositif, limitée par le bruit de sortie des amplificateurs internes aux capteurs, est alors de 0.01 G , ce qui suffit pour mesurer le champ magnétique induit à l'extérieur du fluide qui est d'amplitude 0.5 G environ.
- **Champ toroïdal** : Dans le cas du champ toroïdal appliqué, le champ induit est beaucoup plus faible, ce qui rend les sondes à effet Hall inadaptées. Nous avons alors utilisé des Fluxgate 3-axes modèle 503 fabriqués par Applied Physics System, qui ont une sensibilité de 4.10^4 VT^{-1} . Les mesures locales, qui sont très sensibles aux divers champs parasites, deviennent difficiles à interpréter. Nous les avons donc couplées à une mesure intégrale utilisant une bobine de mesure représentée sur la figure III.16.
- **Mesure du temps de freinage** : Pour l'analyse des mesures, il est important de connaître précisément la vitesse de rotation du tore avant freinage ainsi que le temps de freinage Δt . Cette mesure est possible grâce à un codeur incrémental qui enregistre la position du disque en fonction du temps. Pour les vitesses de rotation utilisées, ce dispositif réclame alors une fréquence d'échantillonnage élevée et nous avons fait les acquisitions à une fréquence fixe de 20 kHz . Un repère ayant été fait sur le disque pour marquer la position des diverters, il est possible de connaître la position angulaire où se trouvent les diverters par rapport aux sondes. Ces mesures se sont révélées particulièrement pertinentes lors de la première campagne utilisant un champ appliqué localisé à l'aide d'un aimant [71].
- **Carte d'acquisition** : Pour toutes les mesures, les acquisitions sont faites avec une carte LabCard PCL1800 12-bit pouvant échantillonner le signal à une fréquence de 330 kHz partagée sur 8 entrées différentielles.

III.3.2 Caractéristiques de l'écoulement

Les études menées à l'ICMM sur un modèle en eau [40] utilisant la visualisation de trajectoires de particules de polystyrène de 2 mm en suspension ont permis de caractériser l'évolution temporelle de l'écoulement. Celle-ci présente deux phases distinctes :

- * Durant le temps de freinage, puis ensuite pendant un intervalle de temps de l'ordre de $\delta t = 0.1 \text{ s}$, la structure de l'écoulement est fortement inhomogène le long du tore. Il ne présente une structure hélicitaire que dans une courte zone située en aval des diverters.
- * Environ 0.1 s après l'arrêt du tore, l'écoulement devient homogène et est organisé en une hélice bouclée sur elle-même. Son hélicité est alors maximale et l'intensité de l'écoulement commence à décroître. Il présente l'aspect que l'on peut observer en figure III.17

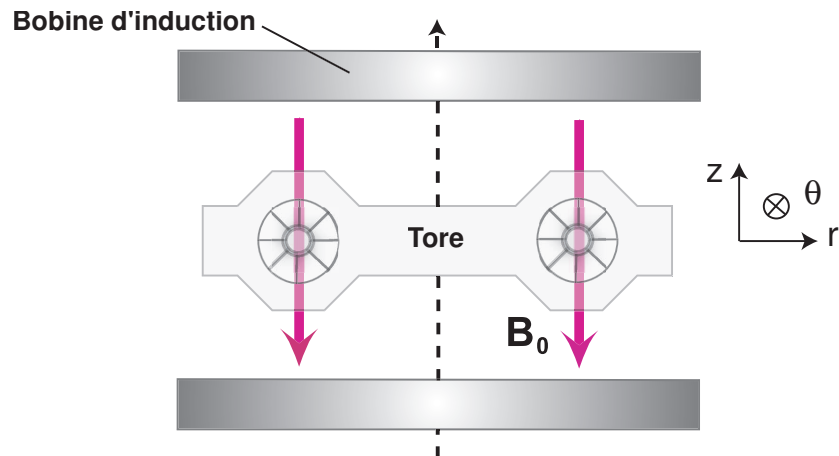


Fig. III.15: Dispositif des bobines autour de la cuve dans la configuration de champ transverse. Les bobines, qui sont en configuration Helmholtz, sont alimentées par une batterie pouvant délivrer 25 A. Le champ obtenu est alors majoritairement parallèle à e_z et son amplitude est de l'ordre de 45 G.

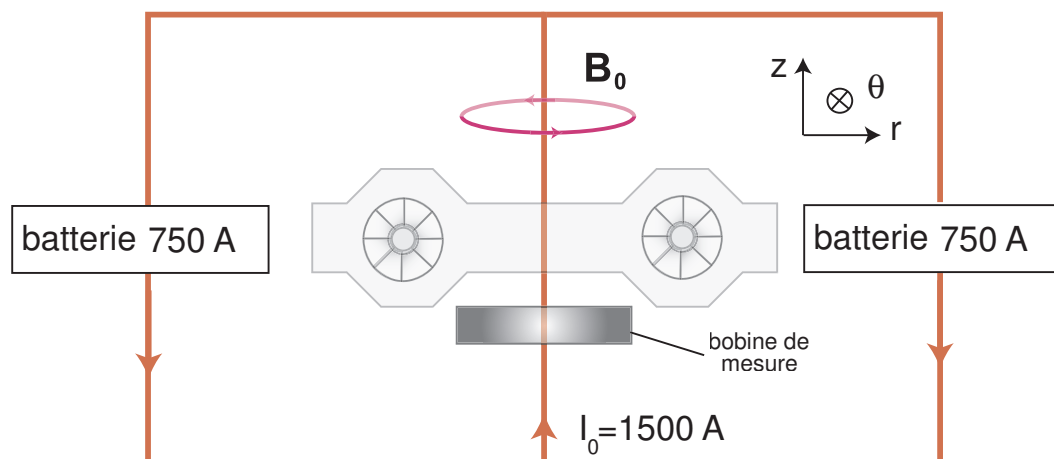


Fig. III.16: Montage symétrique permettant d'obtenir un champ toroïdal. Les câbles sont organisés en deux boucles de courant situées dans un plan horizontal. Elles sont symétriques de manière à minimiser l'écart à la symétrie de révolution, et chacune est alimentée par une batterie pouvant délivrer 750 A. L'amplitude du champ obtenu est 30 G.

sur laquelle on distingue clairement les trajectoires hélicoïdales des particules présentes en suspension.

Durant la phase de déclin qui dure entre 3 et 5 secondes (selon la taille et le nombre de

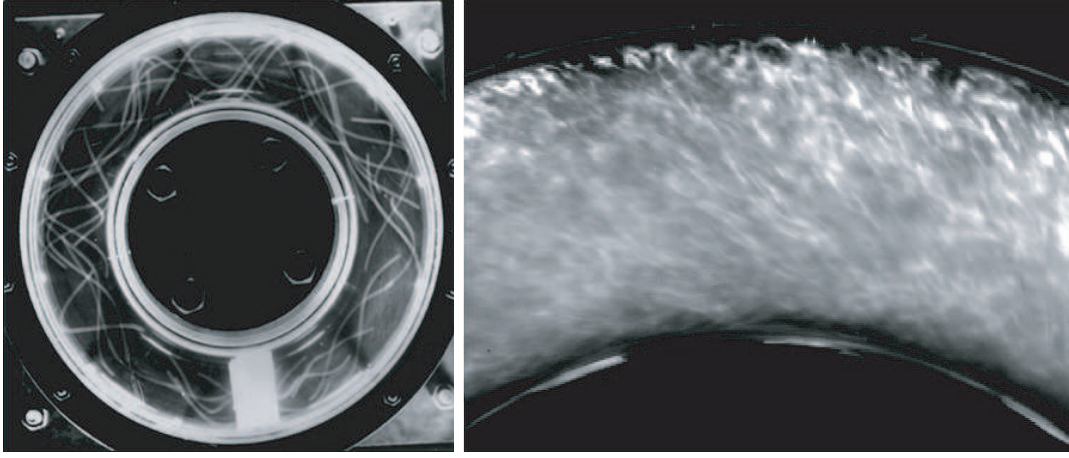


Fig. III.17: Visualisations de l'écoulement durant la phase de déclin à l'aide de particules en suspension dans l'eau. Photographie de gauche : les particules sont des billes de polystyrène et mesurent 2 mm de diamètre. Elles suivent donc les mouvements à grande échelle de l'écoulement. Photographie de droite : Même stade d'évolution pour l'écoulement. Les particules kalioscopiques reflètent la lumière de manière anisotrope et sont suffisamment petites pour suivre les mouvements du fluide à petite échelle.

diverter), la composante grande échelle de la vitesse est donc la somme de deux composantes :

- **Composante toroïdale :** Elle est notée $\mathbf{V}^T(t)$. Son origine se trouve dans le profil initial de rotation solide qui se déstabilise lors du freinage pour devenir turbulent. Cette composante est donc présente même lorsque les diverter sont absents et possède les caractéristiques du profil moyen de l'écoulement turbulent dans un tuyau. Si lors de l'ajout d'un diverter, son temps de décroissance devient plus petit, il a été montré expérimentalement que le profil radial ne change pas de manière notable. Nous l'écrivons donc en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\mathbf{V}^T(t) = V^T(r, z, t)\mathbf{e}_\theta \quad (\text{III.10})$$

- **Composante poloïdale :** nous la notons $\mathbf{V}^P(t)$. Elle provient de l'action des diverter qui prélèvent une partie de l'énergie du mouvement toroïdal pour la transformer en une vorticité toroïdale ω^T qui lui est proportionnelle. On a alors une relation du type :

$$\omega^T = \chi \mathbf{V}^T \quad (\text{III.11})$$

Où χ est un facteur d'efficacité dont le signe dépend de la nature du diverter, et dont l'amplitude dépend de la courbure des pales que l'on peut apercevoir en figure III.13.

Ainsi, à cette vorticité toroïdale ω^T correspond la composante \mathbf{V}^P , invariante par rotation autour \mathbf{e}_z , et qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{V}^P = V_r^P(r, z, t)\mathbf{e}_r + V_z^P(r, z, t)\mathbf{e}_z \quad (\text{III.12})$$

De plus, les amplitudes des champs V_r^P et V_z^P sont proportionnelles à celle de \mathbf{V}^T par construction. Ainsi lorsque nous augmenterons la vitesse de rotation du tore, nous augmenterons dans la même proportion les amplitudes des composantes \mathbf{V}^P et \mathbf{V}^T .

Symétries de l'écoulement

Nous observons que nous pouvons obtenir trois écoulements possibles selon la présence et la nature des diverters considérés.

- **Diverters absents** : dans ce cas, l'écoulement moyen est constitué de la composante \mathbf{V}^T uniquement. Il est donc non hélicitaire, turbulent et ses propriétés sont invariantes par rotation autour de l'axe \mathbf{e}_z .
- **Diverters présents** : dans ce cas, l'écoulement moyen est une superposition de \mathbf{V}^T et de \mathbf{V}^P . Il est donc hélicitaire, turbulent, et son hélicité est déterminée par la nature du diverter considéré.
- **Conventions** : Dans toute la suite, nous utiliserons les conventions de la figure III.18. Le tore tourne donc dans le sens positif lorsqu'il est mis en rotation solide avec une vitesse colinéaire à \mathbf{e}_θ et de même sens. Nous définissons comme diverter droit celui pour lequel χ est positif. Lorsque les diverters droits sont présents, l'hélicité $\mathcal{H} = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ est donc positive. De plus lorsque la vitesse de rotation est positive, la vorticité de la composante poloïdale est alors dirigée selon \mathbf{e}_θ et la composante \mathbf{V}^P sera alors nommée positive.

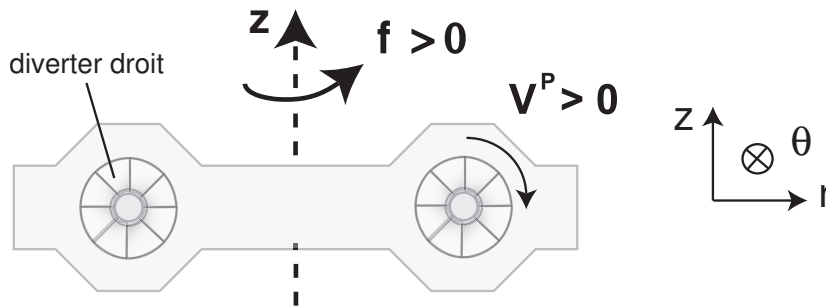


Fig. III.18: Conventions d'orientation.

La démarche expérimentale que nous allons adopter étant basée sur les symétries de l'écoulement, il est important de connaître comment change l'écoulement lorsqu'on renverse le sens de rotation, ou encore lorsqu'on change les diverters. Nous avons regroupé dans le tableau III.4 ces propriétés de symétrie pour les six configurations possibles. Ces propriétés peuvent se résumer ainsi :

Sens de rotation	Diverter	Écoulement	Hélicité
$f > 0$	Droit	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P + \mathbf{V}^T$	$\mathcal{H} > 0$
$f < 0$	Droit	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P - \mathbf{V}^T$	$\mathcal{H} > 0$
$f > 0$	Absent	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P$	$\mathcal{H} = 0$
$f < 0$	Absent	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P$	$\mathcal{H} = 0$
$f > 0$	Gauche	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P + \mathbf{V}^T$	$\mathcal{H} < 0$
$f < 0$	Gauche	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P - \mathbf{V}^T$	$\mathcal{H} < 0$

Tab. III.4: Symétries de l'écoulement dans un retournement du sens de rotation f et dans un changement de diverters.

- À sens de rotation conservé, l'opération de changement de diverter est équivalente au changement $\mathbf{V}^P \rightarrow -\mathbf{V}^P$. Ce changement renverse l'hélicité.
- À nature de diverter fixée, changer le sens de rotation est équivalent au retournement $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$, ce qui conserve l'hélicité.

Nombres sans dimensions :

Les dimensions du tore sont caractérisées par son grand rayon $R = 8.7$ cm et son petit rayon $r = 2.25$ cm. Il contient $\mathcal{V} = 0.8$ l de gallium, ce qui en fait un très petit dispositif comparé au dispositif VKG qui en contient $\mathcal{V} = 6$ l. En revanche, du fait du faible coût énergétique de la rotation solide, il est possible de faire tourner le tore à des fréquences allant jusqu'à 50 Hz, et la gamme de R_m explorée correspondra finalement à celle de VKG.

- **Nombre de Reynolds magnétique :** nous avons estimé R_m en nous basant sur la grande échelle du tore pour l'estimation de l'échelle de vitesse $U = 2\pi Rf$ et le petit rayon du tore pour l'estimation des divers gradients. On obtient alors la formule :

$$R_m = \frac{Ur}{\lambda} = 2\pi \frac{rRf}{\lambda} \quad (\text{III.13})$$

Utilisant les paramètres du dispositif, nous trouvons $R_m \leq 3$. Nous travaillerons donc dans le même type de régime MHD que dans l'expérience VKG et nous pourrions espérer opérer dans un régime faiblement non linéaire. Pour obtenir cette estimation, nous avons supposé que la vitesse du fluide égalait celle du tore. Cela correspond à une conversion parfaite de la rotation solide en mouvement hélicitaire. Il faudra sans doute corriger ce nombre pour obtenir une estimation plus réaliste de R_m .

- **Nombre de Reynolds cinétique :** avec un R_m de l'ordre de l'unité, nous retrouvons que le nombre de Reynolds cinétique Re est de l'ordre de 10^6 . L'écoulement est donc turbulent, résultat qui est en accord avec la visualisation de la figure III.17 qui montre clairement la présence de petites structures au sein de l'écoulement.

- **Temps de diffusion** : son estimation est basée sur la diffusivité du gallium et le petit rayon du tore r . Nous trouvons alors :

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{r^2}{\lambda} = 2.5 \text{ ms} \quad (\text{III.14})$$

Pour comprendre l'implication de ce résultat, nous devons le comparer au temps de freinage $\Delta t \sim 70 \text{ ms}$ et au temps de décroissance de l'écoulement de la phase 2 $\tau_d \sim 1 \text{ s}$. Nous constatons alors que la seconde phase est quasistatique, c'est à dire que la dynamique temporelle du champ magnétique dans cette phase sera un miroir de l'évolution du champ de vitesse. En revanche, concernant la phase de freinage, l'écart entre les deux nombres est au mieux d'un facteur 10 et on ne peut pas, a priori, négliger le terme $\partial_t \mathbf{B}$ dans l'équation d'induction.

- **Paramètre d'interaction.** Puisque toutes les mesures d'induction ont été faites avec $B_0 \leq 50 \text{ G}$, on peut estimer le paramètre d'interaction N avec l'expression :

$$N = \frac{\mathcal{O}(\frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})}{\mathcal{O}((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v})} = \frac{\sigma r B_0^2}{2\pi \rho R f} \leq 10^{-2}. \quad (\text{III.15})$$

Ce paramètre étant très faible dans les expériences, nous pourrions donc négliger l'influence du champ magnétique dans la dynamique du champ de vitesse. Le champ magnétique pourra encore être considéré comme un vecteur passif.

Influence du temps de freinage

Lors de l'étude des écoulements de von Kármán, nous ne nous sommes jamais intéressés à la manière dont on forçait l'écoulement. En effet, dès lors que l'écoulement est suffisamment turbulent et pourvu que l'on entraîne le fluide de manière inertielle et stationnaire, la structure de l'écoulement moyen ne dépend plus ni du fluide, ni de la vitesse de rotation des disques. Ainsi lorsque l'on change cette dernière, on ne change pas la topologie de l'écoulement moyen, mais surtout la valeur maximale de la vitesse.

Ce type de raisonnement n'est plus vrai ici car à géométrie fixée, la vitesse de rotation des moteurs n'est pas l'unique paramètre de contrôle. En effet, les modèles numériques de la dynamique de l'écoulement et les mesures en eau [40] ont montré que l'intensité du mouvement dépendait de manière cruciale du temps de freinage. Ainsi la vitesse maximale du fluide V_{max} n'est pas simplement proportionnelle à la fréquence de rotation f du tore mais doit être corrigée par une fonction du temps de freinage Δt . Il a été démontré dans le cas de l'écoulement en eau que la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$V_{\text{max}} \propto f \Delta t^{-2/3}. \quad (\text{III.16})$$

Ainsi, pour atteindre des régimes de grands R_m et observer la dynamo dans un écoulement en sodium, il est au moins aussi important d'avoir un bon dispositif de freinage, qu'un moteur capable de faire tourner rapidement le tore. Nous verrons dans la partie IV les implications de ce résultat lors de l'analyse des mesures du champ induit.

III.4 Conclusions.

Au cours de ce chapitre, nous avons pu observer que tous les écoulements de métaux liquides utilisés dans les expériences d'induction sont hélicitaires, et pleinement turbulents.

Les dispositifs utilisant le gallium permettent d'étudier les mécanismes d'induction dans le régime quasi-linéaire des $R_m = \mathcal{O}(1)$ alors que le dispositif VKS2, qui utilise le sodium, permet d'atteindre le régime des $R_m = \mathcal{O}(10)$. En appliquant un champ magnétique à ces différents dispositifs, et en mesurant le champ magnétique induit par ces écoulements, nous aborderons plusieurs questions en lien avec la réalisation d'une expérience de dynamo :

- **Peut-on relier la structure stationnaire du champ induit à celle du champ de vitesse moyen ?** Nous étudierons au chapitre IV l'efficacité des mécanismes d'induction dans les écoulements de gallium, nous mettrons en évidence les contraintes fortes qu'imposent à la fois la structure du champ de vitesse, ainsi que la nature des conditions aux limites à l'interface entre le fluide et le milieu extérieur.
- **Les fluctuations turbulentes de l'écoulement contribuent-elles au champ induit stationnaire ?** Dans une configuration où les effets du champ de vitesse moyen doivent être faibles, nous étudierons, dans les écoulements de gallium, la possibilité de convertir un champ toroïdal en un champ poloïdal grâce aux mouvements à petite échelle.
- **Quelle est l'influence des fluctuations aux grandes échelles de l'écoulement de von Kármán $s_2 t_2$ sur les mécanismes d'induction ?** Grâce à la sonde multiple développée au laboratoire, nous étudierons au chapitre VI les fluctuations des mécanismes d'induction aux fréquences intermédiaires et aux basses fréquences.
- **Comment le champ magnétique est-il amplifié par un écoulement turbulent de sodium dans le régime fortement non linéaire ?** Au chapitre VII, nous donnerons les résultats préliminaires obtenus avec le dispositif VKS2. Nous étudierons l'amplification du champ magnétique et analyserons ses fluctuations dans les cas d'un champ transverse homogène ou d'un champ localisé.

Seconde partie : Études expérimentales de la dynamique du champ magnétique induit.

Chapitre IV

Induction moyenne dans les écoulements de gallium

Les écoulements de gallium que nous avons étudiés possèdent une structure organisée à grande échelle qui est soit stationnaire comme dans le cas de VKG, soit lentement décroissante comme dans le cas de l'expérience du tore de Perm. Ainsi en appliquant un champ magnétique extérieur à chacun de ces écoulements de métal liquide, les lignes de champ magnétique sont déformées et transportées par les gradients de vitesse, et nous mesurons un champ magnétique induit qui ne se moyenne pas à zéro en général [73, 71].

Dans un premier temps, nous décrivons l'évolution en fonction de R_m , du champ magnétique moyenné sur un temps T (typiquement 100 s) mesuré en 1 point de l'écoulement lorsqu'on applique un champ magnétique homogène dans les directions axiale ($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$) ou transverse ($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$).

$$\langle \mathbf{B}_{ind} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{B}_{ind}(t) dt, \quad T \gg \frac{1}{\Omega} \quad (\text{IV.1})$$

L'étude et l'interprétation des mécanismes d'induction dus à l'écoulement moyen a constitué le thème central de la thèse de M. Bourgoïn. Aussi les mesures "en 1 point" décrites ici ne concerneront pas de nouveaux mécanismes d'induction. Je les ai faites en 2002 durant la première année de la thèse alors que Mickaël Bourgoïn arrivait au terme de la sienne. L'interprétation de ces mesures résulte donc d'un travail commun [14], même si l'ensemble doit beaucoup à l'apport de ses simulations numériques [13, 15]. Les effets d'induction exposés dans ce chapitre sont importants à plusieurs égards :

- ce sont les mécanismes de base qui sont à l'origine de la possibilité d'une instabilité dynamo par mécanisme " α " – Ω dans l'écoulement de von Kármán à deux disques [73, 16, 79].
- Une connaissance fine de ces mécanismes nous permettra, dans le chapitre V, de discuter l'efficacité relative des petites échelles de la vitesse pour induire un champ magnétique.
- Enfin cette étude, et notamment l'exposé des mesures de profils moyens obtenus avec la sonde multiple, constitue le point de départ de l'étude des fluctuations aux grandes échelles des mécanismes d'induction, thème que nous aborderons au chapitre VI.

Dans un second temps, nous exploiterons les résultats obtenus dans VKG pour analyser les mesures d'induction dans l'expérience du tore lorsqu'un champ homogène est appliqué parallèlement à l'axe de rotation du tore. Nous verrons, à cette occasion, que la décroissance lente du champ de vitesse comparée au temps de diffusion du champ magnétique nous permettra d'interpréter les mécanismes dans l'approximation quasistatique, ce qui semble confirmer la pertinence d'une analyse de dynamo cinématique pour obtenir le seuil de l'instabilité dans la future expérience en sodium de Perm [31].

IV.1 Mécanismes d'induction dans l'expérience VKG

IV.1.1 Dispositif expérimental

Dans cette section, nous décrivons les mesures de champ induit dans le dispositif von Kármán gallium (figure IV.1) décrit au chapitre précédent. La configuration sera soit une contrarotation symétrique des deux disques (notée s_2t_2), soit une configuration s_1t_1 obtenue lorsqu'un seul des disques est en rotation. Dans chaque cas, la fréquence de rotation n'excédera pas $\Omega = 25$ Hz, ce qui correspond à $R_m = 5$ et nous pourrions interpréter les résultats dans l'approximation des faibles R_m . Pour chaque configuration, le champ est produit par deux bobines coaxiales dont le rayon des spires est égal au rayon de la cuve. Elles permettent d'obtenir un champ homogène à 20% près, d'amplitude $B_0 = 25$ G (mesuré dans le plan médian $z = 0$, en $r = R/2$) dans la configuration de champ axial, et d'amplitude $B_0 = 45$ G dans la configuration de champ transverse. Cette différence entre les amplitudes ne tient qu'à la distance entre les bobines qui est plus faible dans le cas transverse.

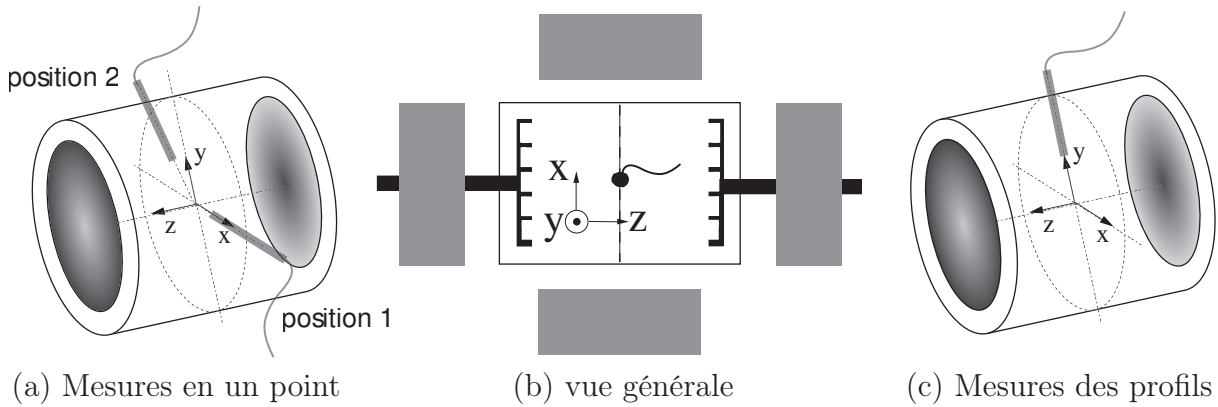


Fig. IV.1: Dispositif expérimental utilisé pour l'étude des mécanismes d'induction dans l'expérience VKG. Figure (a) : pour les mesures en un point en fonction de R_m , la sonde de champ magnétique est placée dans le plan médian dans deux positions particulières. Dans la première, notée 1, la sonde est horizontale et parallèle à l'axe Ox . Dans la seconde, notée 2, la sonde est située dans la partie supérieure de la cuve et décalée d'un angle de 18.5° par rapport à l'axe vertical Oy . Figure (b) : disposition des bobines. Figure (c) : pour les mesures de profils de champ induit, la sonde multiple est placée dans le plan médian, parallèlement à Oy .

Pour toutes les expériences, le champ induit a été mesuré dans le plan médian, ce qui permet d'exploiter au mieux les propriétés de symétrie de l'écoulement. Dans le cas des mesures en 1 point en fonction de Ω , les mesures ont été faites à l'aide du gaussmètre en deux positions. Le long de l'axe Ox d'une part (position 1) et le long de l'axe Oy' décalé par rapport à Oy d'un angle de 18.5° (position 2, figure IV.1 (a)). Les mesures de profils ont été faites avec la seconde version du cylindre pour laquelle la position 2 correspond avec l'axe Oy (figure IV.1 (c)).

IV.1.2 Champ axial appliqué : écoulement contrarotatif

IV.1.2.1 Analyse qualitative

De l'analyse des mécanismes d'induction, nous savons qu'en appliquant un champ magnétique à l'écoulement contrarotatif, le champ induit stationnaire résulte de la déformation des lignes de champ de \mathbf{B}_0 par les gradients de l'écoulement moyen $\langle \mathbf{V} \rangle$. Dans le régime linéaire, le champ magnétique induit \mathbf{B} est solution de l'équation

$$\lambda \Delta \mathbf{B} = -B_0 \cdot \nabla \mathbf{V}. \quad (\text{IV.2})$$

Dans le cas d'un champ axial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, la déformation est due aux gradients axiaux de la vitesse et on aura

$$\lambda \Delta \mathbf{B} = -B_0 \partial_z \mathbf{V}. \quad (\text{IV.3})$$

Il est alors utile de décomposer le champ de vitesse moyen en sa partie toroïdale (rotation différentielle $\mathbf{V}^T = V^T \mathbf{e}_\theta$, figure III.3(c)), et sa partie poloïdale \mathbf{V}^P qui correspond au pompage centrifuge $\mathbf{V}^P = V_r^P \mathbf{e}_r + V_z^P \mathbf{e}_z$ (figure III.3(d)). En projetant l'équation précédente sur la base des coordonnées cylindriques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$), nous obtenons alors que les composantes du champ induit sont solutions des équations :

- composante radiale $\lambda(\Delta \mathbf{B})_r = -B_0 \partial_z V_r^P$, maximum pour $z \sim \pm H/2$
- Composante orthoradiale $\lambda(\Delta \mathbf{B})_\theta = -B_0 \partial_z V_\theta^T$, maximum en $z \sim 0$
- Composante axiale $\lambda \Delta B_z = -B_0 \partial_z V_z^P$, effet dominant pour $z \sim 0$, et $z \sim \pm H/2$

Nous pouvons observer que les composantes poloïdales du champ induit (B_r, B_z) sont reliées à l'écoulement de recirculation \mathbf{V}^P alors que la composante orthoradiale B_θ est associée à l'écoulement orthoradial \mathbf{V}^T uniquement. Du terme source de chaque équation, nous déduisons que le champ induit possède la symétrie de révolution, et que les composantes B_z et B_θ seront dominantes dans le plan $z = 0$. En effet, comme nous l'avons vu lors de l'étude des figures III.3 (c),(d), les composantes moyennes V_z et V_θ sont impaires en fonction de z , et présentent un gradient axial maximal en $z = 0$. En revanche, la composante radiale induite, qui intègre la fonction $\partial_z V_r$ sur le volume du cylindre, sera nulle dans le plan médian du fait de l'impairité de son terme source en fonction de z . Dans cette approximation linéaire, puisque chacune des composantes induites n'est liée qu'à une composante de la vitesse, les symétries du champ induit dans un renversement $\Omega \rightarrow -\Omega$ seront les mêmes que celles du champ de vitesse.

IV.1.2.2 Induction azimuthale

La figure IV.2 (a) représente, pour un champ appliqué d'amplitude 25 G, le champ orthoradial induit mesuré en position 2, à une distance $R/2$ de l'axe Oz , en fonction de R_m . Il apparaît sur ces mesures, qui donnent un résultat identique lorsqu'elles sont faites en position 1, que le champ induit est bien linéaire en fonction de R_m et qu'il possède la symétrie de révolution. On observe de plus que l'induction moyenne est impaire en fonction de R_m . Il s'agit donc bien de l'effet de la rotation différentielle (effet Ω [73]), qui n'est dû qu'à la composante de rotation, et assure la conversion du champ poloïdal appliqué en un champ toroïdal induit.

La figure IV.2 (b) compare les profils de champ orthoradial induit obtenus avec la sonde

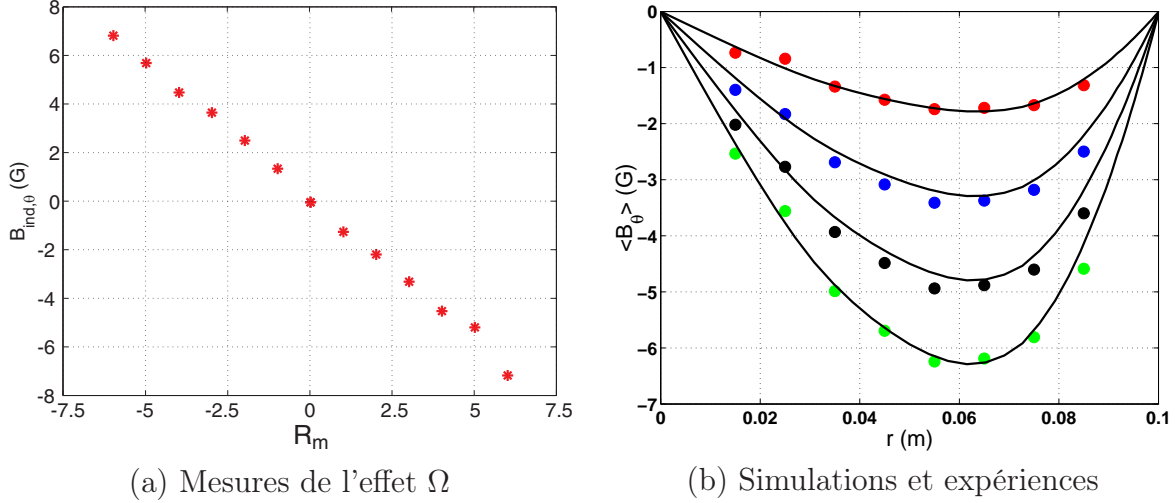


Fig. IV.2: Effet Ω . Figure (a) : mesures expérimentales obtenues en $r = R/2$ en fonction de R_m . Figure (b) : profils de champ induit mesurés avec la sonde multiple (ronds pleins) pour $R_m = 1, 2, 3$, et 4 , et comparaison aux prédictions numériques (lignes pleines) utilisant l'approche perturbative de l'induction et l'écoulement expérimental contrarotatif TM80. Dans les deux cas, l'amplitude du champ axial appliqué vaut $B_0 = 25$ G.

multiple lorsque le nombre de Reynolds magnétique $R_m = 2\pi\Gamma R^2\Omega/\lambda$ varie entre 1 et 4, et le résultat obtenu par la simulation itérative utilisant l'écoulement expérimental TM80 et un champ appliqué axial uniforme d'amplitude 25 G. Pour les nombres de Reynolds magnétiques qu'on peut atteindre dans VKG (inférieurs à 5), le développement en série converge, et l'amplitude des différents ordres décroît suffisamment vite pour qu'une troncature au troisième ordre suffise. Bien que le calcul suppose le champ homogène, nous pouvons observer que la comparaison entre les points expérimentaux et la simulation est quantitative. Les profils se superposent quel que soit le point de mesure, et quel que soit le R_m considéré avec un écart maximal inférieur à 10%.

IV.1.2.3 Induction axiale : effet d'étirement

La figure IV.3 (a) représente l'évolution de la composante axiale du champ induit B_z en fonction de R_m , dans les positions 1 et 2, et pour deux profondeurs distinctes de la sonde magnétique. Nous retrouvons que l'effet mesuré est invariant par rotation autour de Oz , et que le champ induit est linéaire en fonction de R_m de part et d'autre de la valeur zéro. Contrairement au cas précédent, qui avait montré un effet impair en fonction de Ω , nous observons que le champ induit possède un signe qui ne change pas lorsqu'on renverse le sens de rotation. Nous observons de plus que l'effet est beaucoup plus intense lorsqu'on place la sonde proche de l'axe (là où V_z est maximal) que sur le bord de la cuve. Ce résultat est donc en bon accord avec la prédiction qualitative de l'effet du pompage différentiel $\partial_z V_z$ puisque la vitesse de recirculation ne change pas lorsqu'on renverse le signe de Ω . Dans tous les cas, le signe de B_z est le même que celui du champ appliqué, ce qui correspond à un effet constructif puisque le champ induit vient renforcer le champ appliqué. Comme le montre la figure IV.4, cet effet est bien décrit par l'étirement du champ axial appliqué \mathbf{B}_0 par la composante axiale de la recirculation. En effet, celle-ci étant dirigée vers chaque disque de part et d'autre du plan médian, les lignes de champ

sont allongées par l'action de l'écoulement ce qui correspond à un renforcement du champ appliqué. Dans toute la suite, nous nommerons "effet d'étirement" ce renforcement d'un champ axial appliqué.

Comme dans le cas de l'effet Ω , nous avons confronté les profils d'induction obtenus grâce à la sonde multiple aux simulations numériques tronquées à l'ordre 3. Le résultat est présenté en figure IV.3 (b). Nous trouvons encore que l'accord est quantitativement très bon dès lors qu'on fixe la valeur de R_m et la norme du champ appliqué à 30 G. Toutefois, pour observer cet accord entre les données numériques et expérimentales, nous avons dû supposer que les capteurs étaient décalés en bloc de 5 mm vers le centre de la cuve. Ce résultat, dont nous nous sommes aperçus tardivement, demanderait à être confirmé, puisqu'une erreur de positionnement de la sonde ou une légère asymétrie de l'écoulement pourraient toutes deux être à l'origine de l'effet.

Remarque : dans ces deux cas, nous avons donc trouvé un effet d'induction qui ne fait intervenir qu'une seule des deux composantes de l'écoulement (\mathbf{V}^T , ou \mathbf{V}^P). Ces deux effets font donc apparaître les profils de champ magnétique comme un processus géométrique permettant de sonder les gradients des composantes poloïdale et toroïdale séparément.

IV.1.3 Champ transverse appliqué

Nous avons montré dans la section précédente qu'il est possible d'induire par effet Ω un champ toroïdal à partir d'un champ poloïdal appliqué. Nous étudions dans cette section la conversion d'un champ transverse appliqué $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ en un champ axial induit. Comme nous allons le voir, les mécanismes d'induction sont plus complexes dans le cas de l'écoulement contrarotatif que dans le cas de l'écoulement à un disque. Nous commencerons donc l'étude des mécanismes d'induction pour le cas des écoulements $s_1 t_1$. Celle-ci va nous permettre de comprendre le rôle de l'hélicité dans notre montage avant d'observer l'influence des conditions aux limites électriques dans le cas de l'écoulement $s_2 t_2$.

IV.1.3.1 Induction axiale, écoulement $s_1 t_1$

Analyse qualitative : l'écoulement à 1 disque possède une large composante orthoradiale V_θ (rotation) ainsi qu'une large composante axiale V_z (recirculation). En imposant un champ appliqué $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ qui brise l'invariance par rotation du système, nous allons introduire deux directions privilégiées (Ox et Oy) pour observer le champ induit. Les effets produits seront donc plus complexes que dans le cas du champ axial. Nous savons toutefois qu'en première approximation, les lignes de champ de \mathbf{B}_0 vont être entraînées par les gradients du champ de vitesse. Nous allons donc observer à l'ordre 1 un effet de la rotation et un effet du pompage.

- Effet de la rotation : supposons pour simplifier que la rotation est une rotation solide $\mathbf{V} \sim r\Omega \mathbf{e}_\theta$. Le long de l'axe Ox , le champ de vitesse est donc vertical ($\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_y$) et présente un gradient transverse ($\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x$) maximal. Comme le montre la figure IV.5, l'effet de la composante azimutale de la vitesse va donc être d'entraîner les lignes de champ de \mathbf{B}_0 dans la direction Oy pour induire une composante B_y symétrique par rapport au plan yOz dont le signe au centre du cylindre est directement donné par la direction de la rotation.

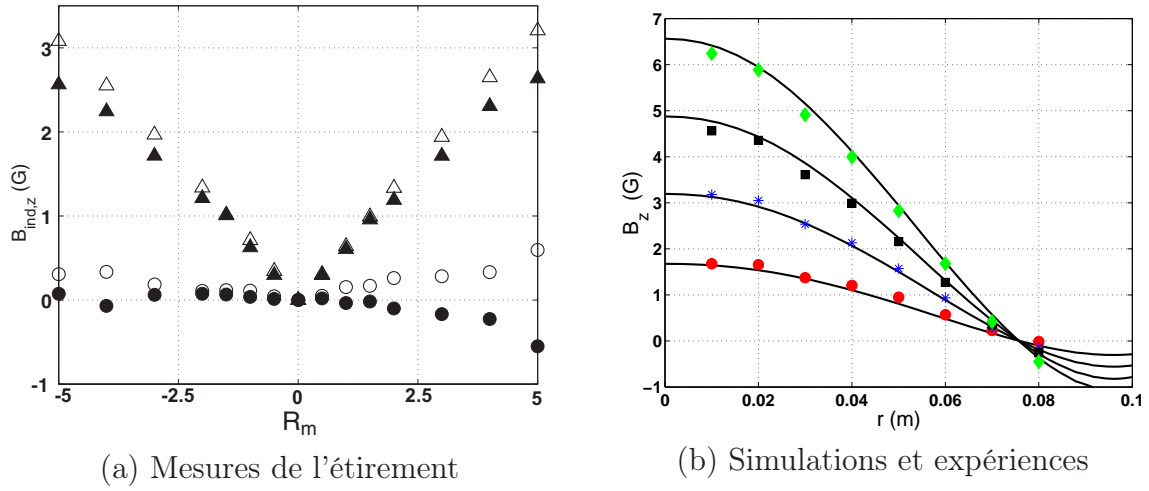


Fig. IV.3: Effet d'étirement. Figure (a) : mesures du champ induit axial dans le plan médian en présence d'un champ axial d'amplitude 20 G. L'écoulement est contrarotatif et les mesures ont été réalisées sur l'axe Ox (symbols vides) et sur l'axe décalé (symbols pleins). Conventions : (Δ , $r = 3 \pm 0.5$ cm), (\circ , $r = 7 \pm 0.5$ cm). Figure (b) : profils d'induction obtenus avec la sonde multiple pour un champ axial imposé $B_0 = 30$ G. (\bullet), $R_m = 1$. ($*$), $R_m = 2$. (\blacksquare), $R_m = 3$. (\blacklozenge), $R_m = 4$. Lignes pleines (-) résultat des simulations ($B_0 = 30$ G).

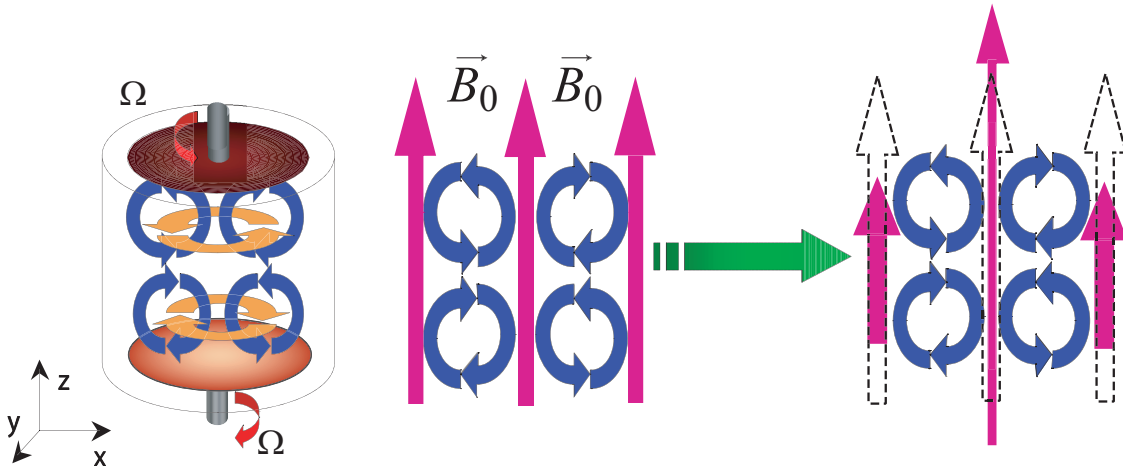


Fig. IV.4: Schéma décrivant la déformation des lignes de champ de \vec{B}_0 par étirement.

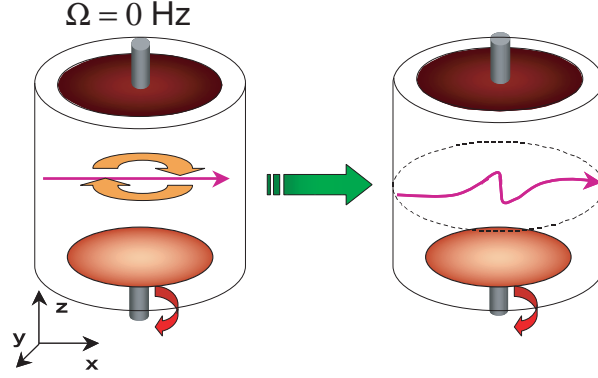


Fig. IV.5: Effet de la rotation sur le champ transverse

Nous rencontrons ici pour la première fois un résultat que nous allons retrouver tout au long des travaux exposés : à l'ordre 1, l'effet d'un écoulement de rotation sur un champ transverse à son axe de rotation consiste en la production d'une composante transverse orthogonale au champ appliqué et dont le sens est donné par le sens de la rotation (Brito, [18, 19]).

• Effet du pompage : le pompage \mathbf{V}^P peut intervenir par l'entremise de sa composante radiale V_r^P ou de sa composante axiale V_z^P . Cependant comme le montre la figure IV.6, la vitesse radiale n'est non négligeable qu'au voisinage des disques, alors que la vitesse axiale est dominante et perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . Comme l'illustre la figure IV.6, l'effet dominant du pompage consiste donc en un étirement des lignes de champ de \mathbf{B}_0 dans la direction axiale. Ce mécanisme correspond à l'induction d'un champ induit solution de l'équation :

$$\lambda \Delta B_z = -\mathbf{B}_0 \cdot \nabla V_z^P \quad (\text{IV.4})$$

Il est plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques pour déterminer où cet effet sera mesurable. Comme $\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$, et que $\partial_\theta V_z^P = 0$ (l'écoulement est axisymétrique), on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\lambda \Delta B_z = -\mathbf{B}_0 \cos \theta \partial_r V_z^P \quad (\text{IV.5})$$

Cette écriture fait apparaître que le terme source donne une contribution maximale sur l'axe Ox , et nulle sur l'axe Oy .

Conclusion de l'analyse linéaire : l'analyse préliminaire a donc montré qu'on doit observer dans le plan médian une composante axiale d'ordre 1 due au pompage (donc paire en fonction de Ω), maximale sur l'axe Ox (position 1) et nulle sur l'axe Oy . Elle doit, de plus, s'accompagner de l'induction d'une composante verticale B_y due à la rotation qui doit donc être impaire en fonction de Ω .

Résultats expérimentaux : la figure IV.7 regroupe l'évolution de l'induction axiale B_z en fonction de la fréquence de rotation, pour chacune des trois configurations d'écoulement étudiées (1 disque et moteur 1, 1 disque et moteur 2, deux disques).

Les figures (a),(b),(e) et (f) concernent la configuration $s_1 t_1$, et les figures (c) et (d) concernent la configuration $s_2 t_2$ que nous étudierons au paragraphe suivant. Sur la partie

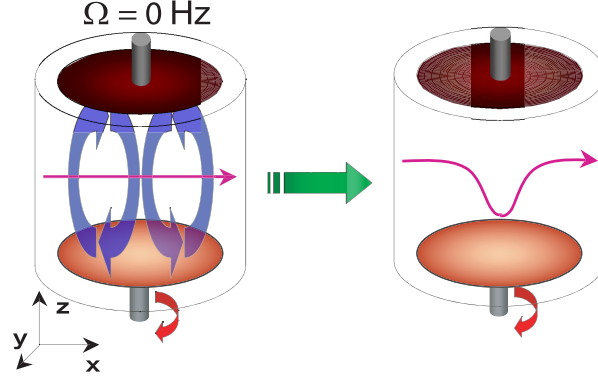


Fig. IV.6: Effet du pompage sur le champ transverse

gauche de la figure, nous avons regroupé les mesures faites au point 1 (en $r \sim R/2$ le long de l'axe Ox), et sur la partie droite les mesures au point 2 (en $r \sim R/2$ le long de l'axe Oy' décalé de 18.5° par rapport à la verticale).

Ces figures confirment les résultats qualitatifs obtenus. Comme le champ appliqué brise l'invariance par rotation, l'induction axiale B_z montre un comportement complètement différent en fonction du point de mesure. Nous observons qu'au point 1 (figures (a),(e)), B_z est une fonction paire de Ω et que le signe de cette composante est déterminé, non par le sens de rotation mais par le disque (1 ou 2) en rotation. Cette composante, qui se renverse lorsqu'on change de disque mais ne varie pas lorsqu'on renverse le sens de rotation, possède donc les mêmes symétries que le pompage \mathbf{V}^P et doit être attribué à l'étirement du champ transverse par le pompage conformément à l'analyse qualitative de la figure IV.6.

Cependant, alors que dans l'approximation linéaire nous n'avions pas prévu l'induction d'une composante B_z au point 2, nous observons sur les figures (b),(f) un champ induit d'une amplitude comparable à celle mesurée au point 1, et qui ne se révèle être ni une fonction paire, ni une fonction impaire de Ω . Pour interpréter ces résultats, nous séparons chacune des deux courbes en sa partie paire (ligne tiretée) et sa partie impaire (ligne pleine). La partie paire de B_z possède les mêmes symétries que les mesures au point 1, mais que son amplitude (2 G) est 2.5 fois plus faible que celle que nous avons mesurée précédemment (5 G). La présence de cette composante analogue à celle mesurée au point 1 doit être attribuée au défaut de symétrie du dispositif de mesure. En effet, la mesure de B_z est faite le long de l'axe Oy' faisant un angle de $\theta = 108.5^\circ$ avec Ox , et le terme source linéaire est proportionnel au cosinus de l'angle θ . En supposant que le rapport des amplitudes est donné par le cosinus de l'angle, on trouve alors un rapport $1/|\cos(108.5^\circ)| \sim 3$ proche de 2.5, et on retrouve que les signes sont opposés puisque $\cos(108.5^\circ) < 0$.

Le signe de la partie impaire de B_z , qui est manifestement non linéaire aux basses vitesses, fait apparaître une nouvelle symétrie. En effet, bien que la composante soit impaire en fonction de Ω , on trouve que l'effet est inchangé lorsqu'on tourne un disque plutôt que l'autre. C'est une preuve que cet effet ne peut pas être un effet linéaire puisque le changement de disque correspond à la transformation $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$. Il nous faut alors chercher un effet non linéaire qui possède les propriétés suivantes : il doit être une fonction impaire en fonction de la rotation \mathbf{V}^T ($\mathbf{B}_z(\mathbf{V}^P, -\mathbf{V}^T) = -\mathbf{B}_z(\mathbf{V}^P, \mathbf{V}^T)$) mais doit être paire en

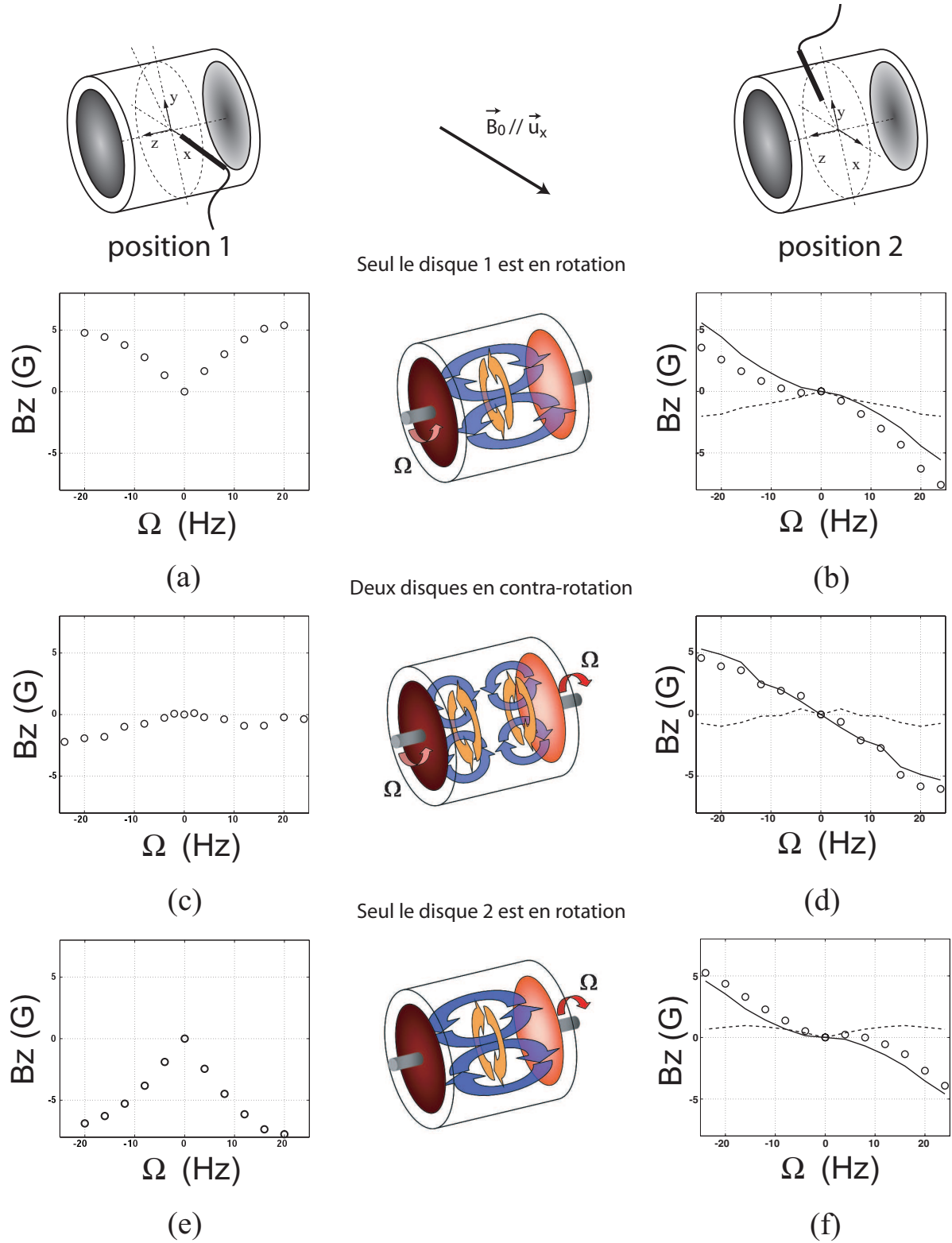


Fig. IV.7: Champ transverse appliqué $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$: évolution de l'induction axiale B_z mesurée aux points 1 et 2 en fonction de la fréquence de rotation des disques. Figures (a), (c) et (e) : mesures au point 1 ($r = \frac{R}{2}, \theta = 0, z = 0$). Figures (b), (d) et (f) : mesures au point 2 ($r = \frac{R}{2}, \theta = 108.5^\circ, z = 0$). Traits pleins (-) : partie impaire, pointillés (- -) : partie paire). Figures (a),(b) : disque 1 en rotation. Figures (c),(d) : deux disques contrarotatifs. Figures (e),(f) : disque 2 en rotation.

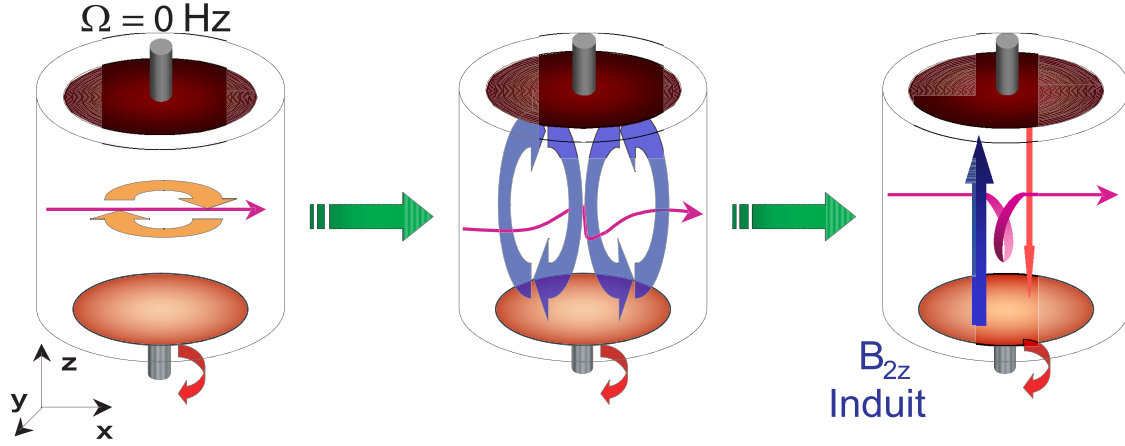


Fig. IV.8: Illustration de l'effet Parker : le champ B_y produit à l'ordre 1 par la rotation est étiré par le pompage axial. Le résultat est alors l'induction d'une composante axiale B_z d'ordre 2 dont le signe est déterminé par le produit des signes de la rotation et du pompage.

fonction du champ de vitesse total ($\mathbf{B}_z(-\mathbf{V}^P, -\mathbf{V}^T) = \mathbf{B}_z(\mathbf{V}^P, \mathbf{V}^T)$). Cette symétrie correspond donc aux propriétés de transformation du produit des signes de la rotation et du pompage. La production de la partie impaire de B_z mesurée au point 2 est donc due à un mécanisme faisant intervenir la nature hélicitaire de l'écoulement puisque le signe du produit de la rotation par le pompage détermine le signe de l'hélicité (voir tableau III.1). En limitant notre recherche aux effets d'ordre 2, nous trouvons un mécanisme (non linéaire par construction) qui produit une composante axiale ayant les symétries de l'hélicité, dominante au point 2, et nulle au point 1. Il s'agit de l'effet Parker [74, 79], mécanisme d'ordre 2 dont on a schématisé le mode d'action en figure IV.8.

Celui-ci se fait en deux étapes : dans une première phase, le champ $B_0\mathbf{e}_x$ subit l'action de la rotation, ce qui produit une composante $B_{1,y}$ dans un voisinage du plan médian. Dans une seconde phase, conformément au mécanisme de la figure IV.6, le champ induit à l'ordre 1, $B_{1,y}$, est étiré par le pompage pour donner un champ induit $B_{2,z}$ maximal sur l'axe Oy , et nul sur l'axe Ox .

Remarque : cet effet d'ordre 2, ainsi que sa saturation par expulsion du champ appliqué par la composante de rotation [106, 72], a été mis en évidence avec le dispositif VKS1 [79]. Le mécanisme décrit n'est naturellement quadratique qu'aux bas R_m , et il n'y a d'ailleurs pas de raison particulière de décrire celui-ci comme l'action successive de la composante de rotation avant celle du pompage. Nous aurions donc pu le décrire en faisant intervenir le pompage avant la rotation. Les simulations numériques montrent en effet [15] que le champ induit à l'ordre 2 résulte de la superposition des deux manières de décrire le mécanisme.

IV.1.3.2 Induction axiale, écoulement s_2t_2

Analyse qualitative : l'analyse linéaire se révèle beaucoup simple dans le cas de l'écoulement contrarotatif. En effet, le champ de vitesse possède dans ce cas deux symétries assez contraignantes :

- l'écoulement de rotation est une fonction impaire de z , ainsi que le gradient transverse $\partial_x \mathbf{V}^T$.
- V_z^P est une fonction impaire de z ainsi que sa dérivée $\partial_x V_z^P$.
- V_r^P est une fonction paire de z ainsi que son gradient transverse $\partial_x V_r^P$.

On en conclut que la rotation donne une contribution nulle dans le plan médian, et que seul le pompage donne une contribution non nulle dans le plan $z = 0$ au travers du terme source $\partial_x V_r^P$. Il produit donc un champ dans les directions Ox et Oy , et ne contribue pas à l'induction axiale B_z . La composante axiale est harmonique au premier ordre dans tout le volume puisque $\Delta B_{1,z} = 0$ dans tout le fluide. Pour trouver un mécanisme provenant des termes volumiques de l'équation d'induction, qui est capable de produire une composante axiale dans le plan médian, il nous faut donc aller à l'ordre suivant et invoquer l'effet Parker que nous avons rencontré dans le paragraphe précédent. En effet, de part et d'autre du plan médian chaque partie de l'écoulement possède une hélicité identique et peut donner une contribution au champ axial par effet Parker qui sera de même signe. Le résultat sera alors l'induction d'une composante axiale non nulle dans le plan médian, qui aura les mêmes caractéristiques que l'induction axiale observée dans le cas de l'écoulement $s_1 t_1$. Elle sera non linéaire en fonction de Ω , maximale au point 2 sur Oy , et nulle au point 1 sur Ox .

Résultats expérimentaux : les figures IV.7 (c),(d) montrent l'évolution de la composante axiale B_z en fonction de la fréquence de rotation dans le cas de l'écoulement contrarotatif. Celles-ci montrent qu'on observe bien un champ induit essentiellement nul au point 1 (figure (c)). Son amplitude en fonction de Ω n'excède pas 5% de B_0 et relève sûrement d'une légère dissymétrie du montage (présence du doigt de gant dans lequel se trouve la sonde Hall ?). Toutefois, ce n'est pas le seul effet qui intervient car on obtient des valeurs qui se rapprochent de zéro (sans atteindre toutefois cette valeur) lorsqu'on accroît le temps utilisé pour faire la moyenne temporelle. Comme nous le verrons dans le chapitre VI, ceci est dû à la dynamique lente de la couche de mélange en configuration $s_2 t_2$ qui fait osciller la composante axiale entre deux états avec un temps caractéristique de l'ordre de quelques secondes, ce qui est non négligeable devant les 30 secondes d'acquisition utilisées pour les mesures de la figure IV.7 (c).

Au point 2 (figure (d)), le long de Oy' , si on observe bien la présence d'une composante axiale impaire en fonction de Ω , on trouve que celle-ci possède une dépendance linéaire avec la vitesse de rotation. Or nous avons vu que la composante Parker (figures (b),(f)) possède un caractère manifestement non linéaire même aux basses vitesses. Il apparaît donc exclu que l'origine de cette composante linéaire se trouve dans un effet Parker. Nous avons alors supposé que celle-ci pouvait être due à une possible advection des gradients du champ appliqué, qui donnent un terme source linéaire $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$. Toutefois, en faisant les mesures avec les bobines de l'expérience VKS2, qui ont un rayon deux fois plus grand et donnent un champ beaucoup plus homogène, nous avons retrouvé un champ axial linéaire en fonction de R_m . C'est grâce à l'apport des simulations numériques de M. Bourgoin [15] que nous avons obtenu la réponse. Cet effet, qui n'apparaît pas dans l'équation d'induction, est illustré en figure IV.9 (a),(b) et (c). Il consiste en une reconnection de la composante $B_{1,y}$ produite à l'ordre 1 par la rotation différentielle (figure (b)), qui boucle dans la cuve pour donner une composante $B_{1,z}$ impaire en fonction de y et impaire en fonction de Ω puisque l'effet n'est dû qu'à la composante de rotation. Comme nous allons le voir, l'origine de cette reconnection est due à la présence des courants potentiels qui

assurent la conservation de la charge. Elle est donc par nature très sensible aux conditions aux limites (isolantes ou conductrices) à l'interface $r = R$ et a été nommée “effet des conditions aux limites” (ou encore “effet C.L.”). Sa présence, que nous n'avions pas observée lors de l'analyse des termes source de l'équation d'induction, souligne les limitations des raisonnements qualitatifs basés sur une équation qui perd l'information contenue dans la partie potentielle $-\nabla\phi$ des courants électriques. Aussi, c'est en raisonnant sur les courants électriques que nous allons montrer qualitativement l'induction d'une composante B_z linéaire en Ω et maximale sur Oy , dès lors qu'on applique un champ transverse à un écoulement présentant de la rotation différentielle.

Pour cela supposons pour simplifier que l'écoulement orthoradial possède une dépendance radiale de type rotation solide, et une dépendance en z sinusoïdale. La cuve correspondra alors à la boîte fondamentale $|z| \leq H/2$ et $r \leq R$, et le plan médian sera le plan $z = 0$. On a alors

$$\mathbf{V}^T = r\Omega \sin\left(\frac{\pi z}{H}\right) \mathbf{e}_\theta, \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_0 = \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{IV.6})$$

Puisque le champ électromoteur $\mathbf{e} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0$ n'est pas à divergence nulle, il y a donc création d'un potentiel électrostatique ϕ_1 qui est solution de l'équation

$$\Delta\phi_1 = \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\pi r \Omega}{H} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \cos\theta \quad (\text{IV.7})$$

Puisque les conditions aux limites ne concernent que la dépendance radiale du potentiel, alors celui-ci s'écrira comme le produit

$$\phi_1(r, \theta, z) = A f(r) \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \cos\theta, \quad (\text{IV.8})$$

où A est une constante et $f(r)$ une fonction qui contient la dépendance radiale du potentiel. À ce potentiel électrostatique correspondra donc un courant électrique orthoradial

$$J_\theta \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{r} \partial_\theta \phi_1 \mathbf{e}_\theta = A \frac{f(r)}{r} \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \sin\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{IV.9})$$

qui est proportionnel au gradient axial de la rotation et au sinus de l'angle. Il est donc source d'une composante axiale de champ magnétique dans le plan médian, linéaire en fonction de Ω , maximale sur l'axe Oy (point 2) pour $\theta = \pi/2$, et nulle sur l'axe Ox (point 1) pour $\theta = 0$.

Remarque : ce raisonnement fait apparaître que la composante $B_{1,z}$ doit être présente même lorsque le milieu extérieur est constitué d'un métal de même conductivité que celle du fluide. En effet, si dans ce cas les conditions aux limites changent, puisqu'on passe de la condition de Neumann (cas isolant)

$$\partial_r \phi_1 = \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0), \quad \text{pour } r = R, \quad (\text{IV.10})$$

à la condition de Dirichlet qui consiste en l'annulation du potentiel à l'infini ($f(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$), le terme source de l'équation de Poisson ne disparaît en aucun cas. Les différentes conditions aux limites possibles ne feront donc que changer la forme de la fonction $f(r)$ mais sans la faire disparaître. La dénomination “effet des conditions aux limites” n'est donc pas complètement appropriée puisque l'effet n'est pas le résultat d'une discontinuité

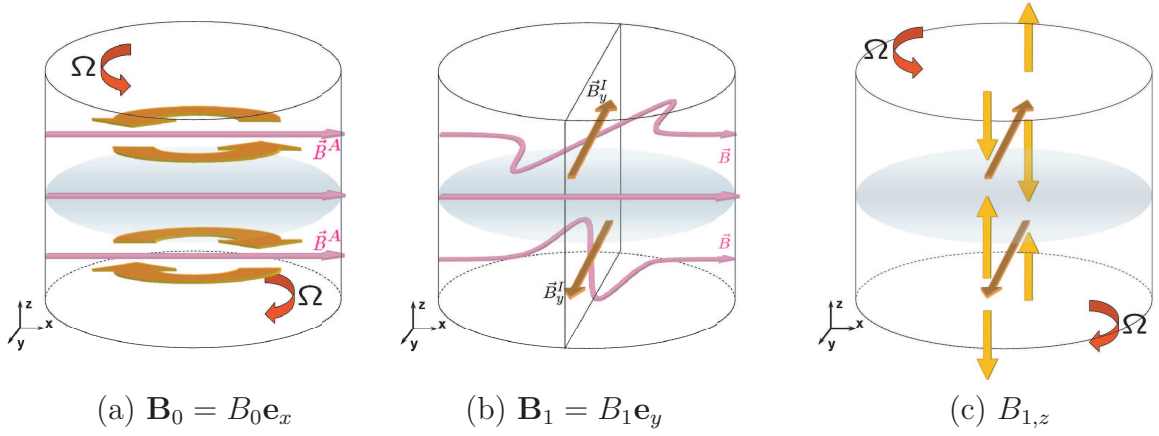


Fig. IV.9: Effet des conditions aux limites : reconnection des lignes de champ. Figure (a) : champ appliqué et écoulement de rotation. Figure (b) : action de la rotation différentielle qui produit un champ $B_{1,y}$ impair en z . Figure (c) : reconnection des lignes de champ sous l'action des courants potentiels.

de conductivité en $r = R$. Toutefois puisque cet effet est entièrement dû aux courants potentiels, il est très sensible à un éventuel saut de conductivité à l'interface $r = R$. Il a d'ailleurs été montré numériquement, et constaté expérimentalement, le résultat suivant [14, 15, 13] :

- dans le cas d'un milieu extérieur isolant, les courants électriques sont confinés dans la cuve, et l'effet est maximal. C'est le cas de VKG.
- Dans le cas d'un milieu extérieur plus conducteur (comme le cuivre), l'effet peut changer de signe et s'opposer à l'effet Parker.

IV.1.3.3 Profils d'induction en champ transverse

Comme nous l'avons vu dans le cas des mesures à 1 disque, si on veut mesurer séparément les effets de la rotation et du pompage, il est important de respecter les symétries du champ magnétique appliqué. En particulier, il est important de faire la mesure parallèlement à l'axe Ox , ou le long de l'axe Oy . Les figures IV.10 (a),(b) montrent les profils d'induction mesurés avec la sonde multiple lorsque celle-ci est disposée le long de Oy dans le plan médian. Les deux disques tournent en contrarotation symétrique, et que l'amplitude du champ appliqué est $B_0 = 48$ G. La figure (a) représente l'évolution, lorsqu'on augmente R_m entre 1 et 4, des profils de la composante axiale B_z que nous avons interprétée comme un résultat de l'effet des conditions aux limites (rotation différentielle). La figure (b) représente quant à elle l'évolution des profils de la composante transverse B_x mesurés pour $R_m = 1, 2$ et 3, ainsi que le résultat de la simulation itérative à l'ordre 3 (lignes pleines). Comme dans le cas de l'effet Ω et de l'effet d'étirement, la parité des effets mesurés est parfaitement définie. Lorsqu'on renverse la vitesse des disques, les profils de la composante axiale sont renversés alors que ceux de la composante transverse demeurent opposés au champ appliqué. Conformément aux résultats de l'effet Ω (figure IV.2), nous retrouvons que la composante mesurée perpendiculairement au champ appliqué est un effet de la rotation différentielle. Le profil, qui s'annule en $r = 0$, est maximal au voisinage de $R/2$ et possède les mêmes symétries que \mathbf{V}^T .

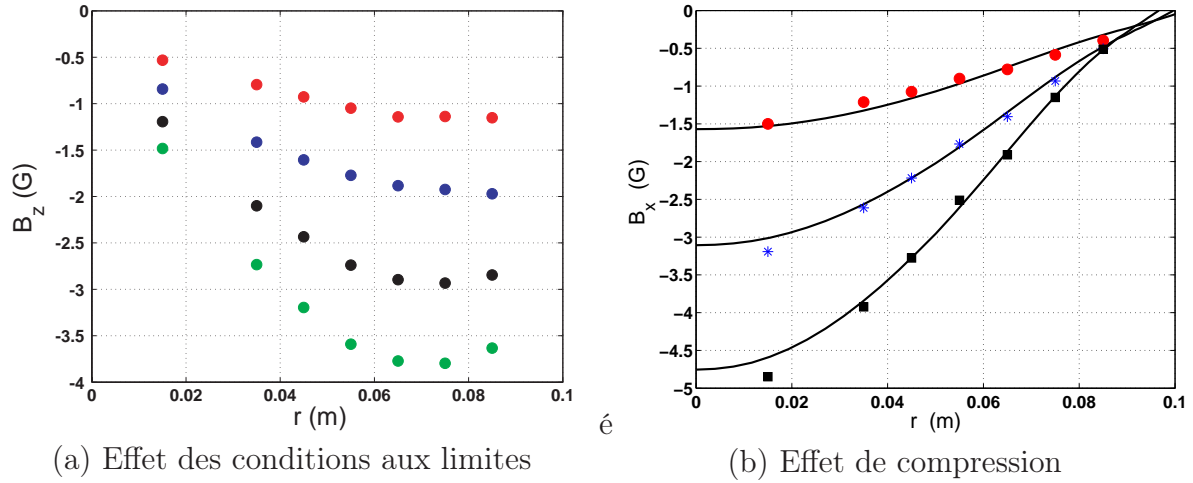


Fig. IV.10: Profils d'induction mesurés avec la sonde multiple le long de l'axe Oy ($\theta = \pi/2$) dans le plan médian. Figure (a) : profils expérimentaux de la composante axiale B_z pour $R_m = 1, 2, 3$ et 4 . Figure (b) : profils expérimentaux de la composante B_x dans le cas d'un champ transverse d'amplitude 48 G. (\bullet), $R_m = 1$. ($*$), $R_m = 2$. (\blacksquare), $R_m = 3$. Lignes pleines (-) résultat des simulations lorsque les conditions aux limites sont isolantes et que le champ appliqué est d'amplitude $B_0 = 48$ G).

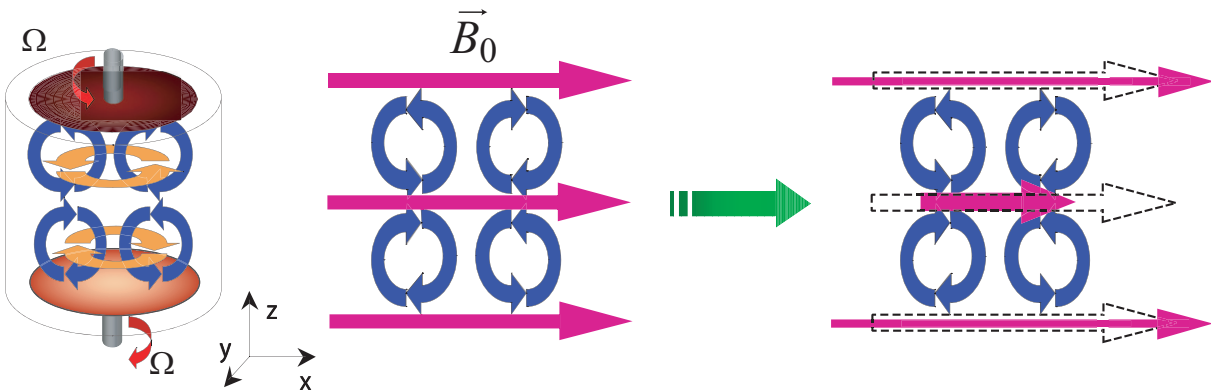


Fig. IV.11: Champ transverse appliqué : effet de compression.

De même, conformément aux résultats de l'effet d'étirement (figure IV.3), la composante mesurée parallèlement au champ appliqué est un effet du pompage. Le profil est maximal au voisinage du point de stagnation, et possède les mêmes symétries que \mathbf{V}^P . Leurs signes diffèrent cependant puisque l'effet de compression renforce le champ appliqué alors que nous trouvons ici un champ B_x opposé au champ appliqué $B_0 \mathbf{e}_x$. Pour expliquer ce résultat, nous avons représenté qualitativement l'action de la recirculation sur le champ transverse en figure IV.11. Cette figure montre que cet effet d'induction est analogue à l'effet d'étirement de la figure IV.4. La différence tient seulement au fait que vis-à-vis du champ transverse, le pompage apparaît renversé. Plutôt que d'étirer le champ, la recirculation comprime donc les lignes de champ de \mathbf{B}_0 ce qui conduit à la production d'une composante induite opposée au champ appliqué. Par analogie, nous appellerons cet effet : "effet de compression".

Comparaison aux simulations : en plus des points expérimentaux, nous avons reporté en figure IV.10 (b) les profils obtenus avec la simulation. La série est tronquée à l'ordre 3 et montre un très bon accord avec les mesures expérimentales de la composante B_x pour la plage des valeurs de R_m accessibles en gallium. Nous obtenons donc que pour l'ensemble des effets produits par les termes sources volumiques de l'équation d'induction, les simulations sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux dès lors qu'on fixe la valeur de R_m et l'amplitude du champ appliqué aux valeurs de l'expérience. Le champ de vitesse étant mesuré dans un prototype utilisant de l'eau, il y a plus de paramètre ajustable.

Dans le cas de l'effet des conditions aux limites, nous avons délibérément choisi de ne pas montrer la comparaison entre les mesures de la composante B_z et le résultat des simulations numériques. En effet, dans ce cas, le résultat des simulations, s'il permet d'obtenir l'ordre de grandeur de l'effet observé, montre un désaccord flagrant entre les profils. C'est en particulier le cas au voisinage de l'interface métal-isolant en $r = R$. Ce résultat devient logique lorsqu'on réalise que toutes les simulations montrées jusqu'ici ont supposé que l'espace extérieur était constitué d'isolant. Or la cuve utilisée est en acier, qui est un alliage conducteur, et fait 2 cm d'épaisseur. Il faut donc en toute rigueur tenir compte de la variation de conductivité entre les deux métaux ($\sigma_{acier} \sim \sigma_{gallium}/3$) à l'interface pour décrire le champ induit. Lorsqu'on utilise la version du code permettant de résoudre un problème de conductivité variable, on observe alors que les trois effets volumiques (effet Ω , effet d'étirement et effet de compression) sont très peu sensibles à un changement de nature des conditions aux limites. En revanche l'adjonction d'une couche d'acier d'épaisseur $e = R/5$ abaisse l'amplitude de la composante axiale obtenue par effet C.L. au voisinage de l'interface. Une description correcte de la discontinuité par la méthode des différences finies réclame un maillage fin (même avec une grille étirée au voisinage de $r = R$) et le cluster de l'ENS Lyon s'est avéré un peu faible en mémoire (ou encombré, c'est au choix!) pour faire tourner les solvers avec une grille aussi fine.

IV.1.4 Conclusion des mesures d'induction moyenne dans VKG

Il transparaît de l'étude des effets d'induction stationnaires dans VKG que les effets d'induction favorables à l'instabilité dynamo ont été compris à l'aide de la structure moyenne du champ de vitesse. Nous avons obtenu quatre configurations d'étude qui permettent de sonder soit la composante de rotation, soit le pompage. Dans le chapitre

VI, nous utiliserons ces configurations d'étude pour analyser les fluctuations des profils de champ induit obtenus avec la sonde multiple. Nous avons aussi pu constater que les mesures de champ induit sont correctement décrites par les résultats de la simulation itérative. Cela constitue une validation indirecte du code numérique, et nous l'utiliserons lors de l'étude numérique des mécanismes d'induction dans des écoulements structurés en colonnes. Enfin nous pouvons souligner la grande sensibilité aux conditions aux limites de l'effet de la rotation différentielle en champ transverse. En effet, il faut tenir compte de la conductivité du matériau qui constitue la cuve pour obtenir un résultat numérique qui se compare aux expériences. On peut dès lors évaluer les difficultés pratiques des problèmes d'inversion pour lesquels on tente une reconstruction des écoulements de métaux à l'aide de mesures du champ induit sur la surface englobant le fluide.

IV.2 Induction aux grandes échelles dans l'expérience au gallium de Perm

Les mesures d'induction que nous présentons dans cette section ont été effectuées en Russie avec le dispositif du Tore [40, 71]. L'ensemble des résultats exposés a été obtenu au cours d'un séjour de 3 mois au sein de l'équipe dynamo de P. Frick à l'ICMM de Perm, durant lequel j'ai travaillé avec V. Noskov à la réalisation des mesures dans le cas d'un champ homogène axial, ou celui d'un champ toroïdal appliqué.

Les mesures en champ orthoradial, qui visent à observer un effet coopératif des mouvements à petite échelle, seront abordées au chapitre V. Nous décrivons donc dans ce chapitre les mesures du champ induit par l'écoulement lorsqu'un champ uniforme \mathbf{B}_0 est appliqué parallèlement à l'axe de rotation du tore. Ces mesures, qui font intervenir la structure hélicitaire de l'écoulement, présentent de nombreuses analogies avec l'étude de l'écoulement de von Kármán $s_1 t_1$. Nous allons voir que malgré le déclin de l'écoulement engendré dans le tore, il nous sera possible de tirer avantage de nos études précédentes en interprétant les mécanismes d'induction dans le cadre de l'approximation quasistationnaire.

IV.2.1 Configuration de champ transverse

La figure IV.12 décrit la géométrie du dispositif expérimental utilisé. Le champ imposé est homogène, parallèle à l'axe de rotation du tore. La situation est donc analogue au champ appliqué $B_0 \mathbf{e}_x$ étudiée dans le cas de l'écoulement à un disque.

Le champ appliqué est produit par deux bobines de rayon $R_B = 17$ cm, plus grandes que le tore qui mesure 12 cm de rayon. Elles sont placées symétriquement de part et d'autre du plan $z = 0$ et sont distantes de $L = 16$ cm. Alimentées par une batterie pouvant délivrant 25 A, elles produisent un champ homogène à 10% près d'amplitude 45 G stable dans le temps. Puisque pour des raisons de sécurité, l'ensemble (tore+bobines) se situe dans une coque en acier magnétique, le champ transverse est quelque peu amplifié, et présente une rémanence lorsque le courant est nul. Dans toute la suite, nous présenterons toujours des courbes dont nous aurons soustrait les effets d'induction lorsque le courant est nul. La fréquence d'acquisition étant de 20 kHz, nous avons filtré les signaux avec un filtre numérique passe-bas à $f_c = 40$ Hz pour éliminer les divers bruits et avons moyenné le signal sur plusieurs acquisitions. Nous avons alors tracé $s(t) = \langle B(I, t) - B(I = 0, t) \rangle_{\text{acq}}$, expression dans laquelle $s(t) = \langle \bullet \rangle_{\text{acq}}$ est une moyenne sur une dizaine de réalisations.

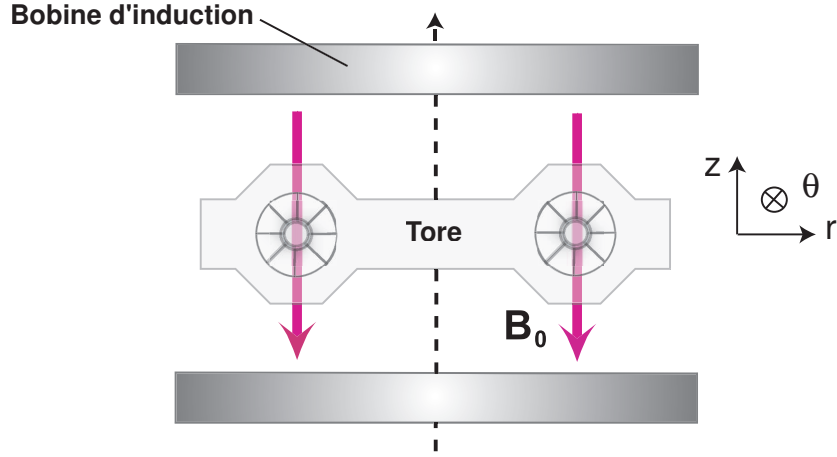


Fig. IV.12: Configuration de champ transverse : vue de dessus du dispositif expérimental. Nous pouvons voir les bobines d'induction qui produisent un champ $B_0 \sim 45$ G parallèle à l'axe Oz , ainsi qu'une coupe du tore. Nous avons matérialisé la présence des diverters par les hélices dans le tuyau.

IV.2.2 Rappels et symétries

Lors de l'interprétation des effets d'induction, nous allons être amenés, comme dans le cas de VKG, à utiliser les propriétés de symétrie de l'écoulement lors d'un renversement du sens de rotation du tore, ou lors d'un échange des diverters. Nous avons donc jugé utile de rappeler le tableau III.4 dans cette partie. L'écoulement moyen présente la symétrie de révolution autour de l'axe \mathbf{e}_z , et on note $\mathbf{V}^P(r, z, t)$ et $\mathbf{V}^T(r, z, t) = V^T(r, z, t)\mathbf{e}_\theta$ les composantes poloïdale et toroïdale de la vitesse. Pour un temps de freinage donné, chacune des composantes du champ de vitesse est en outre proportionnelle à la fréquence f de rotation du moteur, et nous définirons R_m comme

$$R_m = 2\pi \frac{rRf}{\lambda}. \quad (\text{IV.11})$$

Sens de rotation	Diverter	Écoulement	Hélicité
$f > 0$	Droit	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P + \mathbf{V}^T$	$H > 0$
$f < 0$	Droit	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P - \mathbf{V}^T$	$H > 0$
$f > 0$	Absent	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P$	$H = 0$
$f < 0$	Absent	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P$	$H = 0$
$f > 0$	Gauche	$\mathbf{V} = -\mathbf{V}^P + \mathbf{V}^T$	$H < 0$
$f < 0$	Gauche	$\mathbf{V} = \mathbf{V}^P - \mathbf{V}^T$	$H < 0$

Tab. IV.1: Symétries des composantes de l'écoulement dans une inversion du sens de rotation f , et dans un changement des diverters. L'inversion du sens de rotation revient au changement $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$ et un changement des diverters revient au changement $\mathbf{V}^P \rightarrow -\mathbf{V}^P$ à composante toroïdale constante

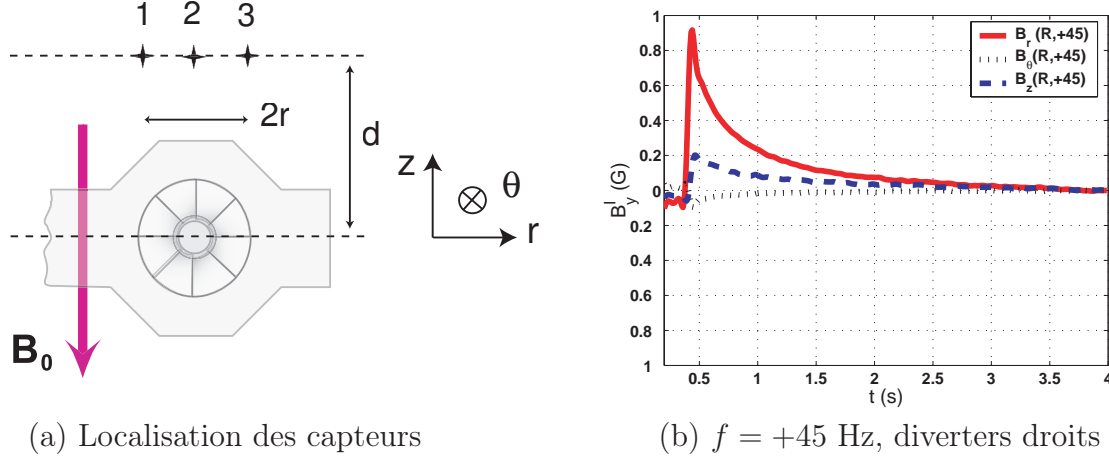


Fig. IV.13: Figure (a) : localisation des mesures avec les sondes statiques. Figure (b) Évolution temporelle du champ induit au point 2 pour un champ axial appliqué. Ligne pleine (-) composante radiale $B_r(t)$, ligne tiretée (- -) composante axiale $B_z(t)$, ligne pointillée (:) composante azimutale $B_\theta(t)$.

IV.2.3 Mesures dans le référentiel du laboratoire

Nous avons tout d'abord enregistré le champ induit avec trois sondes à effet Hall qui permettent la mesure en 1 point de chacune des composantes du champ magnétique. Elles sont fixées sur le couvercle de protection du dispositif et mesurent donc le champ dans le référentiel du laboratoire. Pour étudier la géométrie du champ induit, il est possible de déplacer les sondes entre les acquisitions dans un plan situé à $d = 6.5$ cm du plan médian (figure IV.13). Nous avons effectué des mesures dans ce plan à trois distances de l'axe. À $r = 6.5$ cm de l'axe au point 1, à $r = R = 8.7$ cm de l'axe au point 2, et enfin au point 3 qui correspond au rayon extérieur du canal à $r = 11.9$ cm.

Analyse qualitative : puisque dans toutes les expériences faites dans le tore, R_m n'excède jamais 3, nous allons observer des effets linéaires ou faiblement non linéaires. L'effet dominant sera donc un effet d'ordre 1 qui correspond à l'étirement du champ par les gradients de vitesse. Le champ induit \mathbf{B} est alors relié au champ imposé \mathbf{B}_0 par l'équation

$$\lambda \Delta \mathbf{B}(t) + B_0 \partial_z \mathbf{V}(t) = \partial_t \mathbf{B}(t). \quad (\text{IV.12})$$

Comme le temps de décroissance $\tau_d \sim 1$ s est très nettement supérieur au temps de diffusion $\tau_{\text{diff}} \sim 2.5$ ms, on pourra négliger la dérivée temporelle devant le laplacien du champ induit. Dans cette approximation de régime quasistationnaire, le champ induit à l'ordre 1 est alors solution de l'équation de Poisson

$$\lambda \Delta \mathbf{B}^I(t) + B_0 \partial_z \mathbf{V}(t) = 0. \quad (\text{IV.13})$$

Lorsque les diverters sont présents, l'écoulement est une superposition de la composante azimutale $\mathbf{V}^T = V^T(r, z, t) \mathbf{e}_\theta$ et de la composante poloïdale $\mathbf{V}^P = V_r^P(r, z, t) \mathbf{e}_r + V_z^P(r, z, t) \mathbf{e}_z$. En appliquant un champ \mathbf{B}_0 perpendiculaire au tuyau, on s'attend à ce que la composante \mathbf{V}^P entraîne les lignes de champ dans son mouvement comme le montre la figure IV.14, et génère au centre du vortex une composante induite perpendiculaire au champ appliqué et dont le sens est donné par le sens de rotation de \mathbf{V}^P . Cet effet doit donc

créer une composante majoritairement radiale qui, à distance fixe du centre du vortex, doit être maximale au point 2 par symétrie.

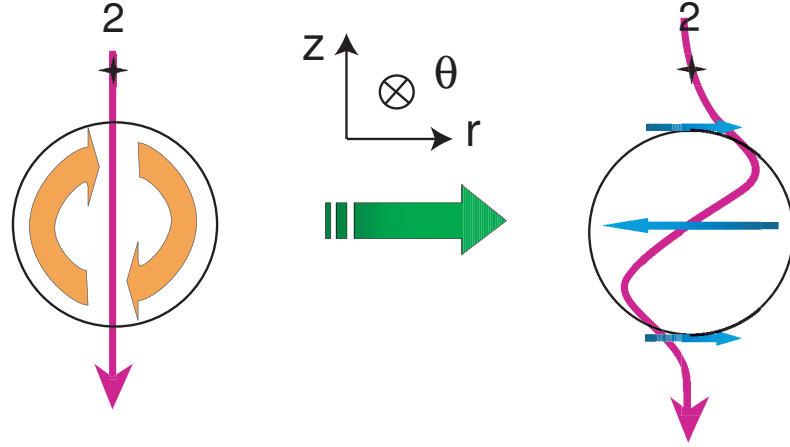


Fig. IV.14: Effet de la composante poloïdale de la vitesse sur le champ transverse appliqué

De même, la composante toroïdale de la vitesse doit agir au travers du terme $\partial_z V^T \mathbf{e}_\theta$, et ainsi étirer les lignes de champ dans la direction azimutale comme le montre la figure IV.15. Cet effet doit aussi être maximal au point 2.

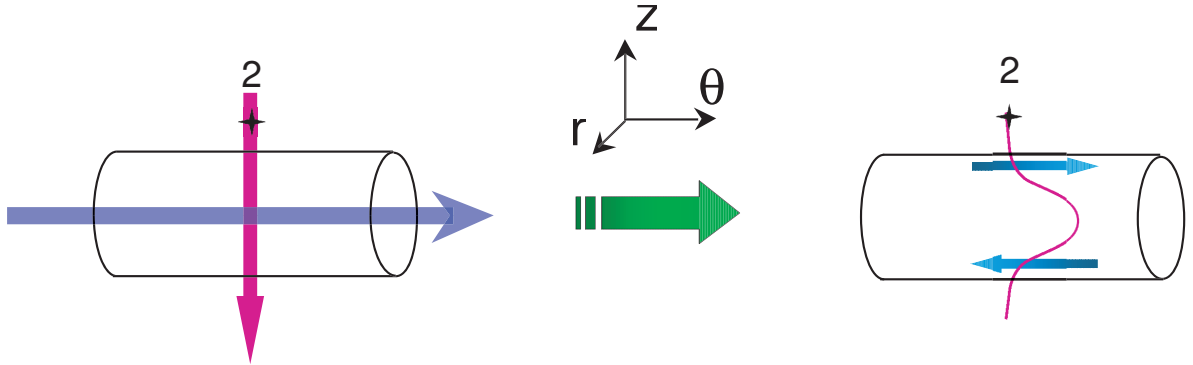


Fig. IV.15: Effet du pompage sur le champ transverse appliqué

Étude de la configuration diverter droit : la figure IV.13 montre l'évolution des trois composantes du champ magnétique induit $\mathbf{B}^I(t)$ mesuré au point 2 en fonction du temps. Nous avons placé deux diverters droits à l'intérieur du tore et initialement, celui-ci est en mouvement de rotation solide avec une fréquence de rotation $f = +45$ Hz. L'acquisition démarre à $t = 0$ s lorsque l'opérateur actionne le dispositif de freinage.

Environ 0.4 s plus tard, lorsque le tore s'arrête, le champ magnétique croît brusquement pour atteindre un maximum en $t \sim 0.45$ s. Une fois ce maximum atteint, il décroît ensuite lentement avec un temps caractéristique de l'ordre de $\tau \sim 1$ s. Ainsi, comme nous

l'avons évoqué lors de l'étude des temps caractéristiques du système, l'évolution du champ magnétique se fait en trois phases distinctes qui sont synchrones avec la dynamique de l'écoulement. Une première correspondant à la rotation solide qui semble ne pas donner d'effets d'induction, une seconde très courte correspondant à l'établissement de l'écoulement hélicitaire, et la troisième beaucoup plus lente durant laquelle l'écoulement est bien structuré en hélice à grande échelle et dissipe l'énergie du mouvement initial.

Nous retrouvons que bien que l'écoulement soit instationnaire, les divers temps d'évolution sont bien supérieurs au temps de diffusion magnétique $\tau_{\text{diff}} = 2.5$ ms. Nous en déduisons que l'évolution du champ magnétique est bien quasistatique pour $t \geq 0.4$ s, et nous interpréterons les mesures du champ induit uniquement à l'aide de la topologie du champ de vitesse, en oubliant pour l'instant le caractère déclinant de ce dernier. Nous observons en outre que si l'évolution temporelle des trois composantes est semblable, les amplitudes qui leurs sont associées ne le sont pas. En effet, l'amplitude de la composante radiale du champ magnétique induit est de l'ordre de 1 G, alors que l'amplitude de B_z est environ 5 fois plus petite et que la composante azimutale est à la limite du seuil de détection du capteur.

IV.2.3.1 Interprétation dans l'approximation linéaire

Pour déterminer quelle est l'origine des différentes composantes induites, nous avons enregistré l'évolution du champ magnétique au même point, et pour chacune des quatre configurations d'écoulements possibles. La figure IV.16 montre les courbes obtenues dans le cas des deux types de diverters, et pour les deux sens de rotation possibles. Lors de chaque acquisition les diverters s'arrêtent à une position différente par rapport aux sondes, nous avons donc tracé une moyenne des signaux sur 10 réalisations. Comme l'instant pour lequel le tore s'arrête fluctue, les courbes sont décalées dans le temps les unes par rapport aux autres. Nous avons mesuré a posteriori l'instant d'arrêt du tore t_A pour chaque acquisition et effectué une moyenne des signaux en fixant arbitrairement $t_A = 0.4$ s. Dans la suite nous appellerons cette opération "moyenne cohérente".

En observant cette figure, nous constatons la symétrie quasi parfaite des courbes lors des changements de configuration.

- Une fois fixée la nature des diverters, lorsqu'on change le sens de la vitesse de rotation, le signe de chacune des composantes se renverse. Nous en déduisons que les effets d'ordre 2, qui sont quadratiques en R_m , sont négligeables devant les effets linéaires au point de mesure.
- Pour un sens de rotation donné, lorsqu'on change les diverters, le signe de chacune des composantes se renverse. Ce résultat prouve que seul compte le sens de la composante poloïdale de la vitesse qui se renverse lorsque l'on change de diverters (tableau IV.1). Ce résultat est confirmé par la faiblesse des effets d'induction dans la direction orthoradiale, qui ne dépassent jamais 0.02 G au maximum.

Impossibilité d'observer la composante toroïdale Les mesures du champ magné-

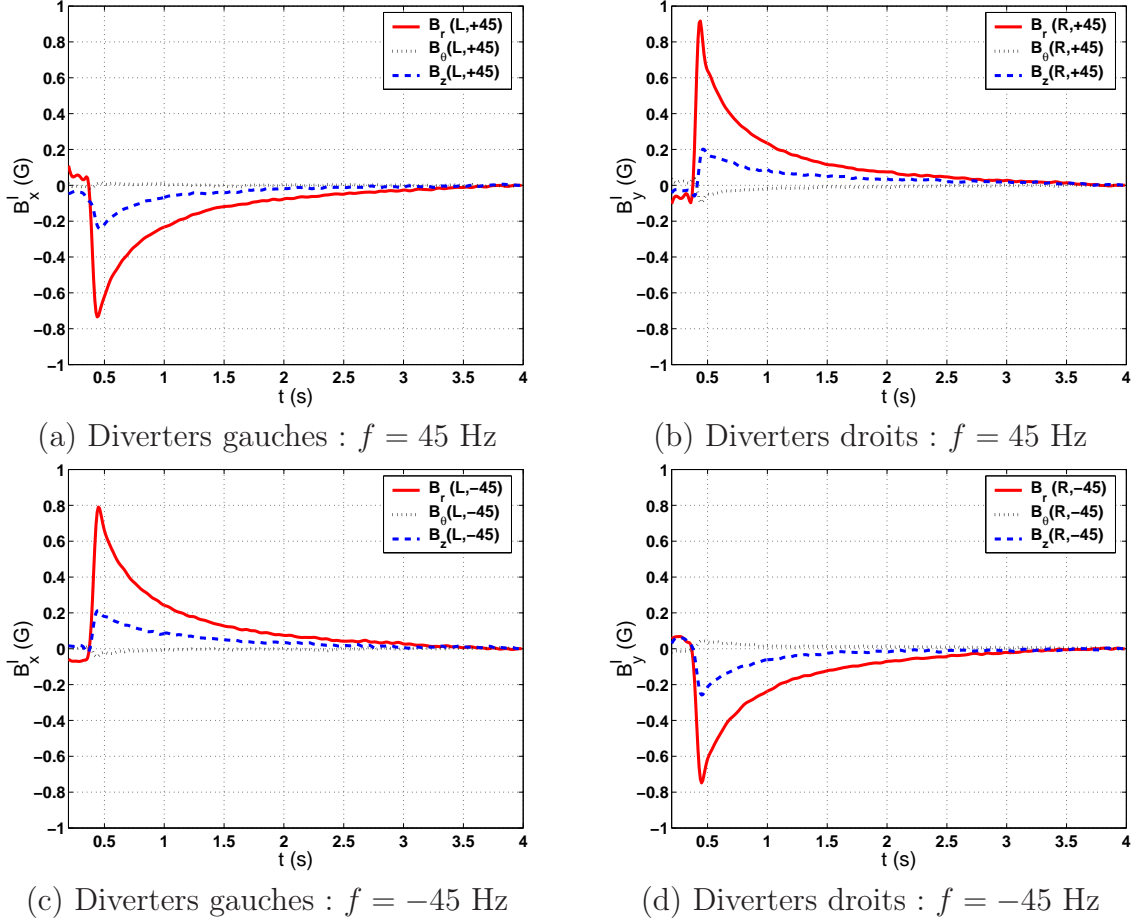


Fig. IV.16: Symétries du champ magnétique induit au point 2 lorsque l'on change la configuration de l'écoulement : sur chacune des quatre figures sont représentées les trois composantes du champ induit mesurées simultanément au point 2 en fonction du temps.

tique induit au point 2 sont donc cohérentes avec l'action de la composante \mathbf{V}^P uniquement. Ce résultat s'interprète de façon logique lorsqu'on considère le champ induit dans l'approximation linéaire. Il est alors solution de l'équation :

$$\lambda \Delta \mathbf{B}(t) + B_0 \partial_z \mathbf{V}^P(t) + B_0 \partial_z \mathbf{V}^T(t) = 0, \quad (\text{IV.14})$$

ce qui montre que \mathbf{V}^T est uniquement source d'une composante toroïdale alors que \mathbf{V}^P ne peut induire qu'une composante poloïdale. Nous retrouvons le résultat observé dans le cas de VKG, les composantes radiale et axiale du champ induit possèdent naturellement les symétries de la vitesse \mathbf{V}^P , alors que la composante \mathbf{B}_θ possède les mêmes propriétés de symétrie que \mathbf{V}^T . Nous savons de plus qu'une fois le tore arrêté, l'écoulement possède la symétrie de révolution. Le champ appliqué possédant cette même propriété, le champ induit la possèdera aussi. Le tore étant construit dans un matériau isolant, les courants électriques sont donc confinés dans le canal qui contient le gallium, et le champ magnétique que l'on mesure à l'extérieur doit être irrotationnel. Puisque le champ induit possède la symétrie de révolution autour de \mathbf{e}_z , sa composante toroïdale $B_\theta(r, z)$, doit donc vérifier dans l'isolant :

$$\nabla \times (B_\theta(r, z) \mathbf{e}_\theta) = -\partial_z B_\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_r (r B_\theta) \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \quad (\text{IV.15})$$

Pour vérifier cette équation, la composante $B_\theta(r, z)$ peut être soit nulle, soit être invariante par rapport z et posséder une dépendance radiale en $1/r$. Cette dernière solution correspond au champ créé par un courant axial uniforme $\mathbf{J} = J\mathbf{e}_z$ localisé dans un cylindre d'axe \mathbf{e}_z et qui boucle à l'infini. Or du fait de la taille finie du système, le champ induit doit nécessairement s'annuler à l'infini. Nous retrouvons donc le résultat bien connu des géophysiciens : un champ orthoradial axisymétrique ne peut être non nul dans l'espace isolant [64]. Pour s'assurer que nous sommes bien les conditions d'application de ce résultat, nous avons vérifié que le champ induit possède bien la symétrie de révolution autour de \mathbf{e}_z . Pour cela nous avons refait les mesures du champ induit dans une configuration équivalente mais en faisant subir à la sonde une rotation d'un angle de $\theta = \pi/2$. Nous avons alors trouvé que le champ induit est axisymétrique à environ 5% près.

IV.2.3.2 A la recherche des effets d'ordre 2

Nous avons vu précédemment que l'on ne mesure au point 2 qu'une composante impaire en R_m , ce qui ne correspond pas aux symétries des effets d'ordre 2. Ces derniers sont donc faibles devant les effets d'ordre 1. Du fait de la structure hélicitaire de l'écoulement dans le tore, il peut paraître surprenant qu'on n'observe pas d'effet Parker dans cette configuration de champ transverse à l'hélice. Nous allons montrer dans ce paragraphe que non seulement cet effet doit être nul à l'extérieur du tore, mais qu'en plus on ne peut espérer mesurer dans l'espace isolant que les effets d'induction dus à la seule action de \mathbf{V}^P .

Pour cela, reformulons le problème posé sous forme de l'action d'opérateurs d'induction. Connaissant le champ induit à l'ordre k , nous pouvons calculer le champ induit à l'ordre $k+1$ comme solution de l'équation :

$$\lambda \Delta \mathbf{B}_{k+1} + \nabla \times (\mathbf{V}^P \times \mathbf{B}_k) + \nabla \times (\mathbf{V}^T \times \mathbf{B}_k) = 0. \quad (\text{IV.16})$$

Définissons alors les opérateurs \mathcal{L}_P et \mathcal{L}_T qui s'identifient avec l'opérateur d'induction

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\lambda} \Delta^{-1} \nabla \times (\mathbf{V} \times \bullet), \quad (\text{IV.17})$$

lorsque seule la composante poloïdale, ou seule la composante toroïdale, est prise en compte. Nous pouvons alors noter formellement la solution de l'équation précédente sous la forme :

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathcal{L}_P \mathbf{B}_k + \mathcal{L}_T \mathbf{B}_k. \quad (\text{IV.18})$$

Utilisant cette notation, nous pouvons écrire le champ \mathbf{B}_1 sous la forme :

$$\mathbf{B}_1 = \mathcal{L}_P \mathbf{B}_0 + \mathcal{L}_T \mathbf{B}_0. \quad (\text{IV.19})$$

Cette égalité fait intervenir $\mathcal{L}_P \mathbf{B}_0$, la partie poloïdale de \mathbf{B}_1 qui n'est due qu'à l'action de \mathbf{V}^P , et $\mathcal{L}_T \mathbf{B}_0$ sa composante toroïdale axisymétrique qui est nulle à l'extérieur du gallium. En développant l'égalité $\mathbf{B}_2 = (\mathcal{L}_P + \mathcal{L}_T) \mathbf{B}_1$, nous obtenons que le champ \mathbf{B}_2 peut s'écrire :

$$\mathbf{B}_2 = \mathcal{L}_P(\mathcal{L}_P \mathbf{B}_0) + \{\mathcal{L}_P(\mathcal{L}_T \mathbf{B}_0) + \mathcal{L}_T(\mathcal{L}_P \mathbf{B}_0)\} + \mathcal{L}_T(\mathcal{L}_T \mathbf{B}_0) = 0. \quad (\text{IV.20})$$

Il est donc composé de trois types de termes qui possèdent des symétries différentes. Le premier, $\mathbf{B}_{PP} = \mathcal{L}_P(\mathcal{L}_P \mathbf{B}_0)$ est une composante quadratique en \mathbf{V}^P , le second, $\mathbf{B}_{PT} + \mathbf{B}_{TP} = \{\mathcal{L}_P(\mathcal{L}_T \mathbf{B}_0) + \mathcal{L}_T(\mathcal{L}_P \mathbf{B}_0)\}$ qui est du signe du produit $V^P V^T$, et le troisième $\mathbf{B}_{TT} =$

$\mathcal{L}_T(\mathcal{L}_T \mathbf{B}_0)$ est quadratique en \mathbf{V}^T . Montrons que le second, qui fait intervenir l'hélicité et correspond à l'effet Parker, donne un champ induit dans la direction orthoradiale uniquement. Pour cela développons tout d'abord l'expression $\nabla \times (\mathbf{V}^P \times \mathbf{B}_1^T)$ qui est source du champ \mathbf{B}_{PT} . Nous obtenons alors l'égalité :

$$\nabla \times (\mathbf{V}^P \times \mathbf{B}_1^T) = (\mathbf{V}^P \cdot \nabla) \mathbf{B}_1^T - (\mathbf{B}_1^T \cdot \nabla) \mathbf{V}^P, \quad (\text{IV.21})$$

qui peut être réécrite comme

$$\nabla \times (\mathbf{V}^P \times \mathbf{B}_1^T) = \mathbf{e}_\theta (\mathbf{V}^P \cdot \nabla) B_1^T - \mathbf{e}_\theta \frac{B_1^T V_r^P}{r}. \quad (\text{IV.22})$$

De la même manière nous pouvons développer le terme $\nabla \times (\mathbf{V}^T \times \mathbf{B}_1^P)$ qui est source du champ \mathbf{B}_{TP} . Nous trouvons alors :

$$\nabla \times (\mathbf{V}^T \times \mathbf{B}_1^P) = \mathbf{e}_\theta \frac{V^T B_{1,r}^P}{r} - \mathbf{e}_\theta (\mathbf{B}_1^P \cdot \nabla) V^T. \quad (\text{IV.23})$$

Comme le montrent ces égalités, les termes sources de l'effet Parker ne donnent qu'une contribution toroïdale possédant la symétrie de révolution. Le champ induit à l'ordre 2 par effet Parker est nul à l'extérieur du canal et ne peut être mesuré qu'à l'intérieur de celui-ci. Nous pouvons, de plus, remarquer que le terme $\nabla \times (\mathbf{V}^T \times \mathbf{B}_1^T)$ étant identiquement nul, le champ \mathbf{B}_{TT} sera lui aussi nul. Nous en concluons alors que la seule composante d'ordre 2 non nulle dans l'espace isolant est la composante poloïdale \mathbf{B}_{PP} qui résulte de l'action en deux étapes de \mathbf{V}^P sur le champ appliqué. Il est alors possible de continuer le raisonnement par récurrence, ce qui prouve que la composante toroïdale \mathbf{B}_{k-1}^T ne peut interagir qu'avec \mathbf{V}^P pour contribuer à la composante orthoradiale \mathbf{B}_k^T . De même, la composante poloïdale \mathbf{B}_{k-1}^P interagit avec \mathbf{V}^T pour contribuer à \mathbf{B}_k^T , et interagit avec \mathbf{V}^P pour donner la composante poloïdale \mathbf{B}_k^P . A l'extérieur du canal, le champ \mathbf{B}_k est donc purement poloïdal et seule la composante poloïdale de la vitesse a contribué à sa génération. Ce résultat démontre la difficulté des mesures d'induction dans l'espace isolant lorsque le champ appliqué ne brise pas la symétrie de révolution. Dans le meilleur des cas le signal est faible, donc difficile à détecter, et dans le pire des cas les contraintes topologiques interdisent la présence de certaines composantes intéressantes dans l'espace isolant. Nous pouvons de plus remarquer que, dans le cas de l'interaction d'un champ poloïdal axisymétrique et de la composante poloïdale de la vitesse, le champ induit ne fait pas intervenir la nature des conditions aux limites isolantes ou conductrices à l'interface gallium-canal. En effet, dans un tel cas, la force électromotrice $\mathbf{e} = \mathbf{V}^P \times \mathbf{B}^P$ est forcément orthoradiale et axisymétrique. Elle est donc à divergence nulle et aucun gradient de potentiel électrique n'est créé. De ce fait, le courant \mathbf{J}^T est uniquement toroïdal et est directement proportionnel à la force électromotrice.

L'ensemble des résultats obtenus peut donc être résumé ainsi :

- le champ induit dans l'espace isolant n'est dû qu'à l'action de la composante poloïdale \mathbf{V}^P . Il possède de plus exactement la même structure que le champ qui serait induit en supposant l'espace extérieur conducteur.
- Toute l'information concernant la composante toroïdale de la vitesse (effet Parker ...) est contenue dans la composante toroïdale du champ induit. Elle ne peut être mesurée qu'à l'intérieur du canal.

Ainsi, il est théoriquement possible de mesurer une composante poloïdale provenant d'un mécanisme d'ordre 2. Contrairement au champ obtenu à l'ordre 1 qui doit se renverser lorsqu'on renverse le sens de rotation du tore, celle-ci doit être invariante lors de toutes les transformations. En particulier, elle ne doit pas se renverser lorsqu'on change le sens de rotation du tore. Il est donc possible d'estimer \mathbf{B}_2 au point 2 en considérant la partie paire du champ induit fonction de la vitesse de rotation : $B_{\text{paire}} = (B(f) + B(-f))/2$. Nous avons alors constaté qu'au point 2 cette composante n'excède jamais la valeur 0.05 G, ce qui est de l'ordre de grandeur de la précision des mesures, et ne permet pas de mettre en évidence un effet. Nous avons alors successivement mesuré le champ induit aux points 1 et 3, mais le résultat s'est avéré négatif. Nous n'avons pas réussi à déterminer clairement si une composante paire fonction de f était présente. Du fait du faible R_m de l'expérience, ce résultat ne prouve pas que les effets non linéaires sont absents. En effet les simulations numériques concernant l'expulsion d'un champ appliqué transverse par un mouvement de rotation solide [15, 13] montrent que les effets d'ordre 2 sont 10 fois plus faibles que les effets d'ordre 1. Comme ces derniers n'excèdent 0.7 G, nous ne pouvons pas attendre d'effets d'ordre 2 plus importants que 0.07 G au mieux ce qui est assez proche de la résolution du dispositif. Pour mesurer les effets d'induction avec plus de précision, il nous faut donc faire les mesures à l'intérieur du liquide, ou alors dans un voisinage immédiat de celui-ci.

IV.2.4 Mesures dans le référentiel tournant

Pour obtenir une mesure la plus précise possible du champ magnétique induit, le mieux est de faire la mesure là où les effets d'induction sont les plus forts. C'est à dire *in situ*, dans le référentiel lié au tore. Malheureusement, et contrairement au dispositif VKG pour lequel la pression n'excède jamais 2 bars, il règne de fortes pressions dans le tore au moment de la rotation solide. Nous pouvons évaluer le terme de pression dû à la force centrifuge par

$$P = \frac{1}{2}\rho U^2 \sim \frac{1}{2}\rho(2\pi Rf)^2 \quad (\text{IV.24})$$

En substituant les valeurs numériques, nous trouvons que la pression est supérieure à 12 atmosphères lors des phases de rotation solide à $f = 45$ Hz. Cette pression étant relativement élevée, nous avons décidé de ne pas percer le canal, et ainsi de nous restreindre à des mesures dans l'espace isolant voisin du fluide.

Nous avons alors incrusté deux capteurs à effet Hall uniaxes dans le matériau isolant au voisinage du canal comme le montre la figure IV.17.

- La première, est située au point mr , à 5 mm au dessus du canal à une distance $r = 8.7$ cm du centre du dispositif. Elle permet la mesure de la composante radiale du champ magnétique induit là où nous attendons un important effet d'ordre 1.
 - Nous avons placé le second capteur à effet Hall au point mz , à 5 mm du rayon intérieur du tore et dans le plan de symétrie de ce dernier. Il mesure la composante axiale du champ induit à l'endroit où sont attendus de forts effets d'expulsion du champ appliqué.
- Afin de pas mesurer d'artefact dû à la présence proche des diverters, nous avons placé les sondes dans le plan $\theta = \text{cte}$ le plus loin possible des deux diverters.

Une fois fixés sur le modèle tournant, les capteurs doivent être alimentés et le signal

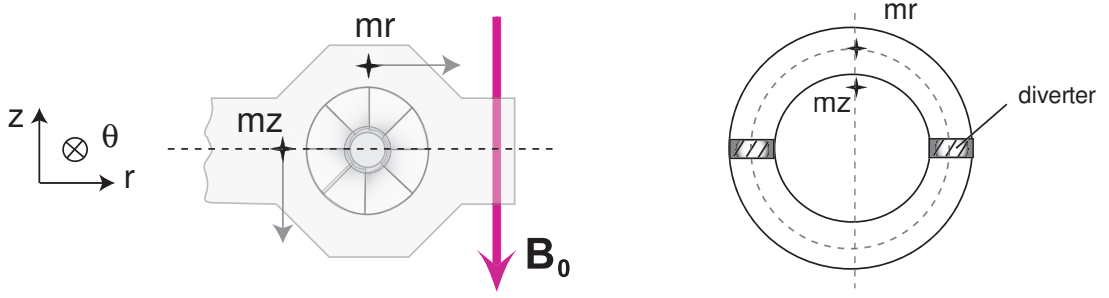
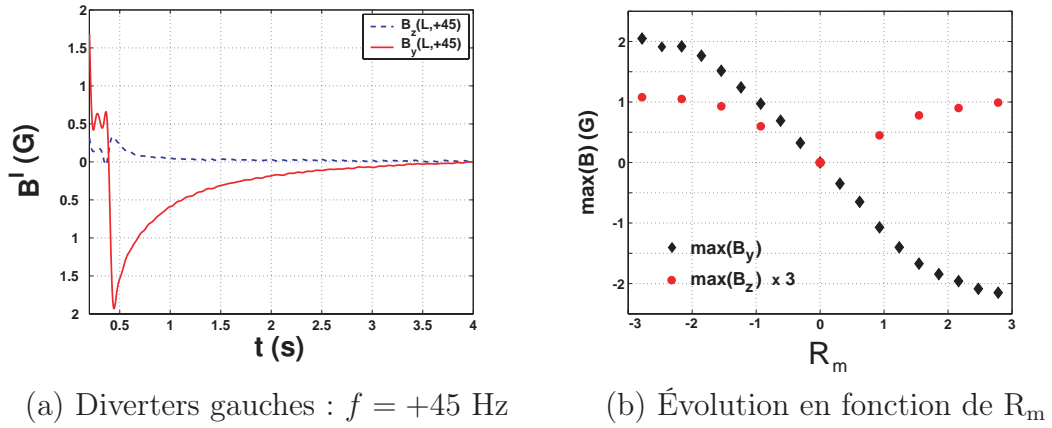


Fig. IV.17: Disposition des deux sondes attachées au tore.

doit être récupéré en sortie pour pouvoir faire les acquisitions à l'ordinateur. Nous avons utilisé pour cela un collecteur tournant modèle 44925 fabriqué par Air Precision, qui permet de délivrer un signal de sortie très peu bruité. Il nous a donc été possible d'alimenter les capteurs à l'aide du collecteur d'une part, et d'amplifier le signal de sortie des capteurs en aval du collecteur d'autre part. Ce faisant, nous n'avons eu que peu de matériel à embarquer avec le modèle, ce qui n'a donc pas perturbé l'équilibre.



(a) Diverters gauches : $f = +45$ Hz

(b) Évolution en fonction de R_m

Fig. IV.18: Figure (a) : Évolution du champ magnétique en fonction du temps pour des diverters gauches et une fréquence $f = +45$ Hz. ligne pleine (-) : composante radiale B_r mesurée au point mr , ligne tiretée (- -) : composante axiale B_z mesurée au point mz . Figure (b) : Maximum du champ induit en fonction de R_m . (♦) : maximum de la composante radiale B_r en mr . (●) : maximum de la composante axiale B_z en mz . Pour la lisibilité la composante B_z a été multipliée par 3.

La figure IV.18 (a) montre le champ induit aux points mr et mz en fonction du temps dans le cas de deux diverters gauches et d'une fréquence de rotation $f = \pm 45$ Hz. Le champ magnétique, qui présente la même dépendance temporelle que précédemment, possède une amplitude environ deux fois plus importante que dans le cas des sondes statiques. La figure IV.18 (b) montre comment évolue le maximum des composantes axiale et radiale du champ induit en fonction de la vitesse de rotation. Il est à noter que nous avons multiplié la composante axiale par 3 pour plus de lisibilité, de telle sorte que pour une fréquence de rotation de $+45$ Hz (correspondant à $R_m = 2.9$), nous retrouvons que le maximum de B_z vaut 0.3 G. Nous pouvons observer sur ces deux courbes que les symétries des deux composantes sont différentes puisque la composante B_r est impaire en f alors que B_z est paire.

Il est d'ailleurs à noter que, contrairement aux mesures en champ transverse effectuées dans l'expérience VKG, la parité des effets mesurés est parfaitement définie. Ceci provient du choix judicieux de positionnement des sondes. Nous observons de plus que quel que soit le sens de rotation du tore, le champ axial induit est positif, indiquant qu'il est de même sens que le champ appliqué $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Nous avons donc trouvé un mécanisme pair en \mathbf{V}^P qui agit en renforçant le champ appliqué. L'ensemble des propriétés de symétrie des mesures de B_r en mr et de B_z en mz que nous venons de décrire est en très bon accord avec l'image classique de l'action d'un vortex sur un champ magnétique transverse. La composante radiale impaire correspond à l'action de la composante poloïdale \mathbf{V}^P sur le champ localement transverse au vortex alors que la composante axiale et paire correspond à l'expulsion du champ appliqué par le vortex [72, 15].

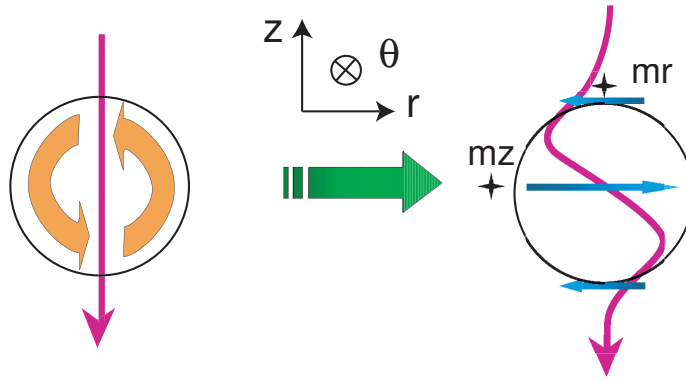


Fig. IV.19: Action de la composante poloïdale \mathbf{V}^P sur un champ axial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$: la ligne de champ verticale est étirée dans le sens de la rotation pour donner un champ induit radial B_r positif au centre du vortex, et négatif en mr .

Pour illustrer ces effets, nous avons représenté en figure IV.19 la déformation des lignes de champ à l'ordre 1 dans le cas d'un diverter gauche et d'une rotation positive. Celle-ci montre qu'au point mr , \mathbf{V}^P agit en étirant les lignes de champ dans la direction de la rotation, ce qui crée par construction une composante dominante radiale négative et impaire fonction de f . Elle s'accompagne d'une composante axiale $B_{1,z}$ qui doit être nulle en mz du fait du caractère antisymétrique de \mathbf{V}^P par rapport au plan $z = 0$. Puisque la composante axiale est nulle à l'ordre 1 en mz , le champ mesuré ne peut provenir que d'un effet d'ordre supérieur. En faisant agir \mathbf{V}^P sur le champ \mathbf{B}_1 (majoritairement radial) obtenu à l'ordre 1, nous obtenons la structure du champ induit à l'ordre 2 par le mécanisme d'expulsion (figure IV.20). Celui-ci induit une composante axiale $B_{2,z}$ opposée au champ appliqué au centre du vortex, mais dans le sens du champ appliqué à l'extérieur de celui-ci. Il renforce donc le champ appliqué au point mz .

Remarque : la présence de cet effet d'expulsion est importante car elle apporte la preuve que le système présente un comportement non linéaire en fonction de R_m . Ce comportement est, comme nous le verrons dans le chapitre V, une condition nécessaire à une possible action des petites échelles.

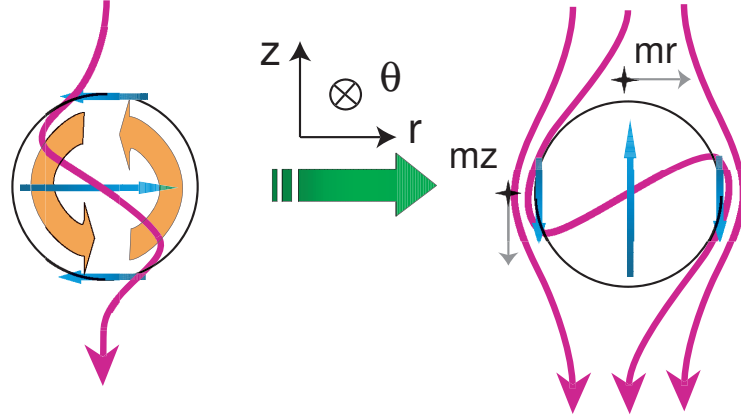


Fig. IV.20: Effet d'expulsion du champ axial par la composante \mathbf{V}^P : \mathbf{V}^P agit sur le champ radial induit à l'ordre 1 en induisant une composante axiale à l'ordre 2 dont le sens est donné par le sens de rotation du vortex.

IV.2.4.1 Évolution en fonction de R_m .

En observant les ordres de grandeurs des effets mesurés, nous voyons que pour $R_m \sim 3$, l'effet d'ordre 2 mesuré en mz est environ 7 fois plus faible que l'effet d'ordre 1 mesuré en mr . Nous retrouvons donc que les effets d'ordres supérieurs sont faibles, et il n'est pas surprenant que l'on ne puisse pas les mesurer à grande distance du plan $z = 0$. Ce résultat nous permet de plus d'estimer que dans le cas présent, l'amplitude du terme d'ordre 3 doit être totalement négligeable devant l'effet linéaire. Les courbes de la figure IV.18 (b) présentent dès lors un aspect paradoxal puisque l'amplitude de la composante radiale est loin de présenter une dépendance en R_m linéaire alors que les effets d'ordres supérieurs sont négligeables. Il semblerait donc que les effets d'induction mesurés ne sont pas aussi importants à grande vitesse que ne le prévoit l'approximation linéaire. Nous pouvons émettre deux hypothèses quant aux causes de la perte de linéarité des mesures en fonction de f . Soit l'approximation linéaire n'est pas valable, soit R_m n'est pas une fonction linéaire de la fréquence de rotation du moteur. Or, de par notre connaissance des effets d'induction à bas R_m , nous savons que l'approximation linéaire est robuste aux régimes considérés. Il nous est alors apparu utile de vérifier le comportement hydrodynamique du système, et en particulier de contrôler la quantité qui gouverne la conversion du mouvement de rotation solide en l'écoulement \mathbf{V}^P : le temps de freinage Δt . En effet jusqu'ici, nous n'en avons pas tenu compte ce qui revient à supposer implicitement que le dispositif de freinage agit avec suffisamment de couple pour que Δt ne varie pas lorsque l'on change la vitesse de rotation du moteur. Vérifier cette dernière hypothèse peut se faire sans peine puisque pour chaque acquisition, nous mesurons la vitesse instantanée du tore grâce à un dispositif optique. La mesure permet d'obtenir l'évolution temporelle de la vitesse lors de la phase de freinage, que nous avons représentée en figure IV.21 dans le cas d'une consigne moteur $f = +45$ Hz. Celle-ci montre que la vitesse est constante et égale à 43 Hz pour $t \leq 0.3$ s, ce qui indique que la consigne moteur surestime un peu la vitesse réelle. C'est à partir de ces courbes que nous estimons l'intervalle de freinage Δt que nous allons utiliser dans la suite.

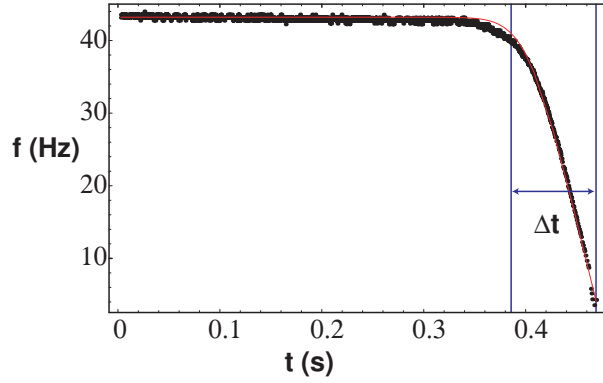
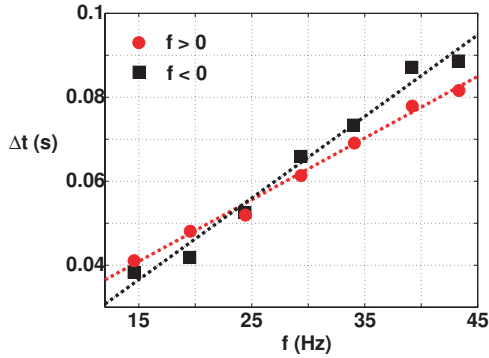
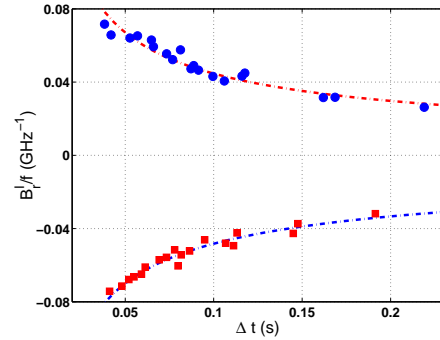


Fig. IV.21: Évolution de la vitesse du tore en fonction du temps. Le module de la fréquence est initialement stationnaire et égal à 43 Hz. Elle commence par décroître lentement aux alentours de $t = 0.4$ s durant le temps de mise en action du frein, puis linéairement au delà. Notant t_{90} l'instant pour lequel la vitesse vaut 90% de sa valeur initiale, et t_S l'instant pour lequel le tore stoppe, nous estimons le temps de freinage comme la différence $\Delta t = t_S - t_{90}$. Dans le cas de la figure, le temps de freinage est $\Delta t = 85$ ms.



(a) Fréquence instantanée



(b) Évolution du temps de freinage

Fig. IV.22: Figure (a) : évolution du temps de freinage en fonction de la vitesse de rotation pour une masse de sable constante. (●) rotation positive. (■) rotation négative. Figure (b) : évolution du rapport $\max(B_r)/|f|$ en fonction du temps de freinage Δt . (●), rotation positive. (■), rotation négative. Ligne tiretée (- -), ajustement par une loi de puissance d'exposante $\gamma = -0.5$.

Comme nous l'avons vu dans la partie III.3, le dispositif de freinage est constitué d'un frein à disque qu'on met en pression à l'aide de la chute d'une masse de sable. C'est donc la quantité de sable qui fixe la pression sur le frein, et conditionne l'efficacité du freinage. La figure IV.22 (a) représente l'évolution du temps de freinage, pour une masse de sable constante (la masse maximale), en fonction de la fréquence du moteur. Nous observons, comme nous le suspicions, que le temps de freinage n'est pas constant lorsqu'on augmente la fréquence de rotation. Sa dépendance est linéaire en fonction de la fréquence, et le système présente même une légère asymétrie entre $f \geq 0$ et $f \leq 0$. Cette linéarité ne doit pas surprendre puisqu'une relation $\Delta t \propto f$ est caractéristique de la présence de frottement solide, donc du mode de fonctionnement d'un frein à disque. Ce résultat est tout de même ennuyeux dans la mesure où les expériences dans l'eau ont montré que l'amplitude maximale de la vitesse dépend du temps de freinage selon la loi de puissance $V_{\max} \propto f \Delta t^{-2/3}$. Si nous utilisons de manière brute cette relation, avec les temps de freinage expérimentaux pour $f = +15$ et $+40$ Hz, nous trouvons qu'on n'augmente pas R_m d'un facteur 2.6 mais seulement d'un facteur 1.6. La différence est donc considérable, et nous avons alors cherché s'il était possible que l'amplitude du champ magnétique varie comme le produit de la fréquence par une puissance de Δt . Nous avons donc refait les mêmes expériences pour des diverters gauches en changeant à la fois la masse de sable du dispositif de freinage et la fréquence de rotation, ce qui permet d'obtenir toute une variété de fréquences et de temps de freinage. Supposant que l'amplitude maximale du champ induit est une image de la vitesse maximale du fluide (donc de R_m), nous avons alors représenté sur la figure IV.22 (b) l'évolution de $\max(B_r)/f$ en fonction du temps de freinage Δt . Le résultat est analogue au résultat obtenu dans l'eau [40], l'ensemble des points de mesure se rassemblent avec un bon accord sur deux courbes symétriques de la forme Δt^γ , mais avec un exposant $\gamma = -0.5$ différent de celui obtenu dans l'eau. Une fois l'exposant γ déterminé, nous avons corrigé R_m du temps de freinage en fixant arbitrairement le temps de freinage de référence $\Delta t_0 = 0.05$ s, ce qui est le résultat obtenu pour $f = 24$ Hz. Nous avons alors représenté l'amplitude des composantes mesurées en fonction de

$$R_m^* = R_m \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_0} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{IV.25})$$

La figure IV.23 montre que pour $R_m^* \leq 1.5$, la composante radiale varie à peu près linéairement en fonction de R_m^* .

Sur aucune des figures IV.23 (a) et (b) qui montrent l'évolution des maxima des effets d'induction en fonction de R_m , nous ne voyons la composante B_z varier quadratiquement avec le nombre de Reynolds magnétique. Or nous savons des résultats de l'expérience VKG, que les effets d'ordre 2 doivent varier comme le carré de R_m au moins pour les très faibles R_m [13]. Ce n'est donc pas le cas ici et nous n'avons obtenu qu'un effet dont les symétries sont cohérentes avec une interprétation à l'aide d'un mécanisme en deux étapes. Pour trancher, il nous manque toutefois les mesures pour de faibles vitesses de rotation du moteur. A ces vitesses nous n'avons pas pu déterminer l'amplitude de la composante axiale du champ induit tant le signal est faible et bruité. Pour conclure de manière satisfaisante, et obtenir des mesures plus quantitatives, il faudrait disposer de mesures à l'intérieur du canal, là où le signal est le plus important.

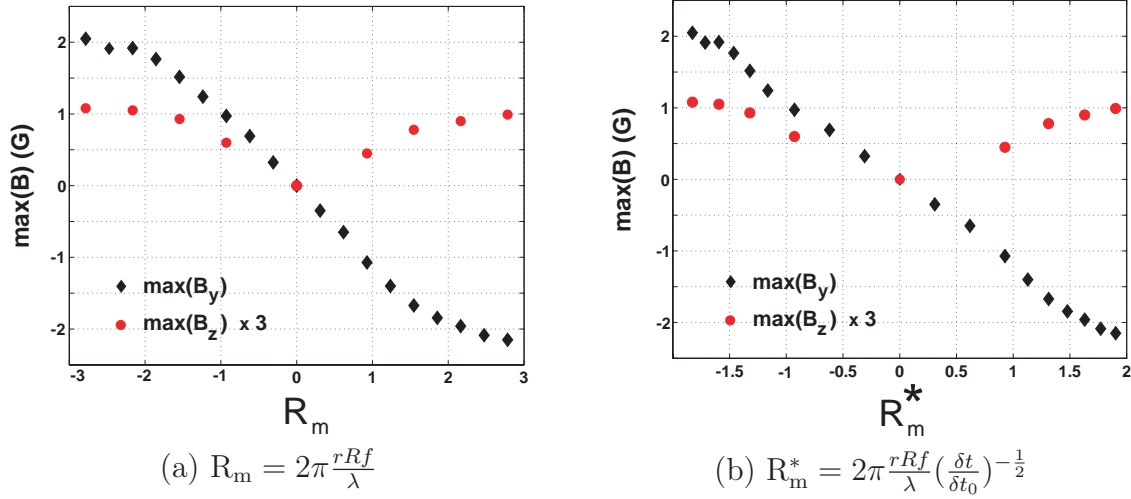


Fig. IV.23: Figure (a) Évolution du maximum des composantes axiale et radiale du champ induit en fonction de R_m . (♦) B_r , (●) $3 \times B_z$. Cette figure est identique à la figure IV.18 (b). Figure (b) Évolution de l'amplitude maximale des composante axiale et radiale du champ induit en fonction de R_m^* .

IV.2.5 Conclusion sur les mesures d'induction moyenne dans le tore.

Nous avons pu, grâce à notre connaissance des mécanismes d'induction dans VKG, interpréter les mesures de champ induit dans l'expérience de Perm. Les résultats obtenus appellent quatre commentaires principaux :

- nous avons observé les contraintes énormes que représente la présence de parois isolantes, qui interdisent notamment à une composante toroïdale de sortir du fluide. Avec un tel résultat, et puisqu'il a été montré expérimentalement que l'ensemble des gradients de la composante \mathbf{V}^T est concentré dans une couche limite près des parois [40], la dynamo toroïdale nécessite la présence d'une couche conductrice entre le sodium et l'espace isolant. Le dispositif dynamo n'échappera donc pas à la règle maintenant bien connue de l'addition d'une couche extérieure conductrice au repos permettant d'exploiter l'ensemble des gradients de vitesse [9]. Celle-ci sera constituée d'un alliage cuivre-chrome, qui possède une conductivité égale à 80% de celle du cuivre pur, ce qui permet d'abaisser le seuil [31].
- Nous avons aussi observé l'importance cruciale du dispositif de freinage pour l'augmentation du nombre de Reynolds magnétique. Ainsi, il est prévu que le dispositif de freinage de l'expérience dynamo soit constitué de 12 freins de camions synchronisés pour permettre au tore de s'arrêter en 0.1 s.
- Nous avons vu que même pour $R_m \leq 2$, le système montre l'induction d'une composante axiale d'amplitude 0.3 G par un mécanisme d'ordre 2. Il fonctionne donc dans un régime non linéaire et à ce titre, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, il peut prétendre à la production d'un champ à grande échelle à partir de l'action de ses mouvements à petite échelle.
- Enfin, il nous paraît utile de souligner qu'il est toujours aussi surprenant que les mesures faites dans le référentiel tournant soient d'aussi bonne qualité. En effet, si l'utilisation nominale des collecteurs autorise des vitesses très élevées dans le régime stationnaire, l'arrêt

brutal du tore s'apparente à un choc très violent, et l'accélération subie par le dispositif est énorme. Le temps de freinage étant $\Delta t \sim 0.1$ s, et la vitesse $U \sim 2\pi Rf = 25 \text{ m.s}^{-1}$, l'amplitude de l'accélération est environ 25 fois celle due à la gravité. Nous voyons donc que stopper brutalement le tore est équivalent à frapper l'ensemble capteurs et collecteur tournant d'un "bon" coup de marteau. Il est donc assez surprenant qu'après des centaines d'acquisitions, l'ensemble fonctionne toujours aussi bien.

Chapitre V

Induction et mouvements à petite échelle

V.1 Motivations

Comme nous l'avons déjà souligné à plusieurs reprises dans les parties précédentes, tous les métaux liquides utilisables au laboratoire tel que le sodium, le gallium ou le mercure possèdent un nombre de Prandtl magnétique P_m de l'ordre de 10^{-6} . Ainsi les écoulements de métaux liquides sont pleinement turbulents dans les régimes de R_m que nous considérons. Le champ de vitesse présente donc des fluctuations à toutes les échelles (figure V.1), dont la valeur rms peut atteindre 30 à 50% de la valeur moyenne. La présence de ces fluctuations pose alors deux questions sur leur possible contribution à la dynamique du champ induit.

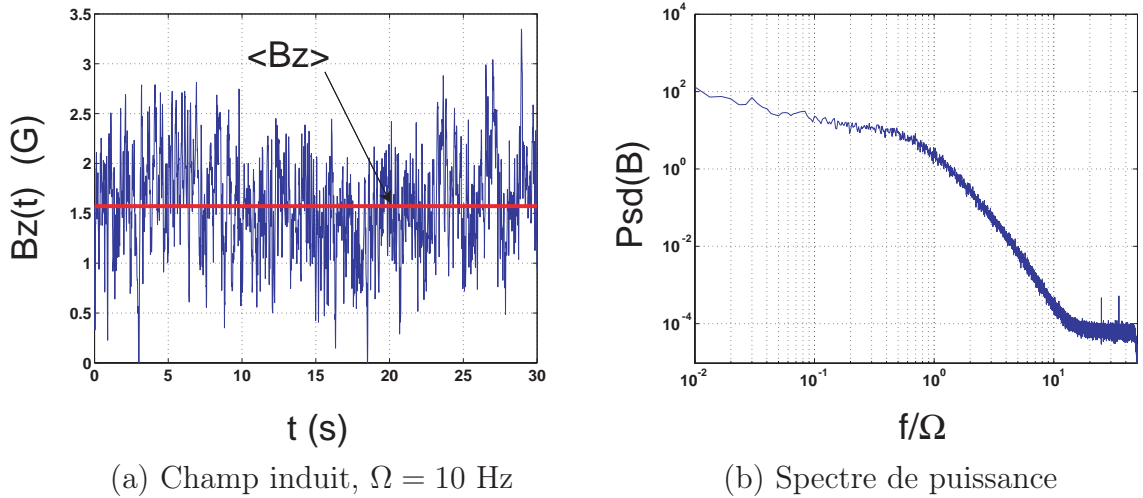


Fig. V.1: Écoulement contrarotatif $\Omega = 10$ Hz en champ axial appliqué $B_0 = 25$ G. Figure (a) : évolution temporelle au point $(r = R/2, \theta = 0, z = 0)$ de la composante axiale induite par l'effet d'étirement. Figure (b) : spectre de puissance tracé en fonction de la fréquence réduite f/Ω .

- Puisque les mouvements du fluide à petite échelle agissent comme un bruit multiplicatif sur la dynamique du champ magnétique, modifient-ils le seuil de l'instabilité ? C'est un problème de physique non linéaire qui est central pour la réalisation des dynamos expérimentales. Dans le cas des dynamos "faible bruit" de Karlsruhe et de Riga [101, 43], il semble que cela ne soit pas le cas puisque le seuil observé est en bon accord avec les prévisions numériques basées sur l'écoulement stationnaire. Toutefois, ces deux écoulements

ayant été optimisés pour donner un taux de fluctuation inférieur à 10%, lorsqu'on extrapole le résultat de Pétrélis et Fauve [78] au cas de la turbulence, on trouve naturellement que le déplacement du seuil d'instabilité doit être indécidable expérimentalement. Ce résultat n'est donc pas probant, et dans le cas des écoulements à fort taux de fluctuation, la turbulence peut jouer un grand rôle sur le seuil l'instabilité dynamo.

- Puisque les fluctuations de vitesse \mathbf{v} engendrent des fluctuations de champ magnétique induit \mathbf{b} , ces deux quantités peuvent-elle interagir pour donner une contribution cohérente via la force électromotrice stationnaire $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$?

Ceci pose donc la question d'une possible contribution cohérente des mouvements à petite échelle dans le cas des écoulements turbulents utilisés au laboratoire, pour lesquels les spectres de vitesse et de champ magnétique ne présentent pas de séparation d'échelle (figure V.1 (b)). Cette question est centrale en astrophysique, et a donné à de nombreux travaux théoriques [63, 50, 64], qui ont servi de base à l'interprétation des observations [94].

V.1.1 Champ moyen et fluctuations

Lorsqu'on veut modéliser la contribution des petites échelles de la turbulence sur la dynamique à grande échelle du champ magnétique, on est amené à séparer le champ magnétique et le champ de vitesse en deux contributions. L'une nommée grande échelle résulte du filtrage passe bas de ces grandeurs, et l'autre nommée petite échelle, résulte de leur filtrage passe haut. Le problème consiste alors à étudier l'interaction entre les champs ainsi définis. Nous décomposons le champ de vitesse et le champ magnétique induit en une partie moyenne et une partie fluctuante de moyenne nulle :

$$\begin{cases} \mathbf{V} &= \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{v} \\ \mathbf{B} &= \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b} \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Cette expression fait intervenir une opération de moyenne qu'il nous faut maintenant définir. Elle peut se faire soit dans l'espace de Fourier (moyenne spatiale), soit dans le domaine temporel. La plus adaptée à notre problème, qui consiste en la mesure d'une série temporelle en 1 seul point de l'écoulement, est la moyenne temporelle. Et puisque les propriétés statistiques de la turbulence sont stationnaires (ou déclinent lentement), nous ne considérerons que des moyennes temporelles sur des temps longs devant le temps caractéristique des fluctuations de l'écoulement. Nous écrirons alors la moyenne du champ magnétique calculée sur un temps T comme :

$$\langle \mathbf{B} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{B}(t) dt. \quad (\text{V.2})$$

En prenant la moyenne de l'équation d'induction dans le cas d'un champ appliqué stationnaire, nous obtenons alors l'équation d'évolution du champ magnétique moyen :

$$\langle \partial_t \mathbf{B} \rangle = \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \lambda \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle + \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{V.3})$$

Comme le temps T sera toujours choisi suffisamment grand devant le temps de diffusion magnétique du système, cette équation ne fait plus intervenir le temps. Elle s'écrit alors dans l'approximation quasistatique :

$$\lambda \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle = -\nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{V.4})$$

Cette équation fait intervenir un nouveau terme source provenant de la moyenne du produit des fluctuations, $\mathcal{E} = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$, dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'à présent. Nous avons d'ailleurs interprété avec un bon accord les effets moyens dans l'expérience VKG en ne tenant compte que du champ de vitesse moyen, ce qui prouve que la contribution de la turbulence n'est pas dominante dans nos dispositifs expérimentaux. Toutefois, nous avons pu observer que le champ induit stationnaire possède des propriétés de parité bien définies dans un renversement du sens de rotation des disques. On pourra donc espérer utiliser les propriétés de parité, alliées à la précision de nos dispositifs expérimentaux, pour séparer l'effet produit par le champ de vitesse stationnaire de celui produit par les mouvements à petite échelle.

V.1.2 Ordres de grandeur

Pour obtenir l'ordre de grandeur des effets d'induction des petites échelles, il nous faut comparer le terme source $\nabla \times \mathcal{E} = \nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$, aux effets du champ de vitesse moyen qui s'écrivent $\nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}_0))$. Comme ces deux termes varient sur la même échelle, ceci revient directement à comparer $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ et $\langle \mathbf{V} \rangle \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}_0)$. Pour cela, commençons par évaluer l'ordre de grandeur de la composante fluctuante \mathbf{b} . Lorsqu'un champ \mathbf{B}_0 est appliqué au système, celle-ci est solution de l'équation :

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}_0)) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle) + \lambda \Delta \mathbf{b}. \quad (\text{V.5})$$

Cette équation, qui se réduit à $\lambda \Delta \mathbf{b} = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$ dans l'approximation des faibles R_m , montre que la composante fluctuante est linéaire en R_m . Dans l'approche perturbative, elle correspond donc à un effet d'induction d'ordre 1, et la force électromotrice $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ apparaît comme un terme source d'ordre 2. Si on note $\langle \mathbf{B}_1 \rangle$ le champ magnétique stationnaire obtenu par l'un des mécanismes linéaires dus à l'écoulement moyen (effet Ω , effet de compression, ...), alors le terme $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ doit être comparé au terme source d'ordre 2 correspondant $\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B}_1 \rangle$. En utilisant la valeur rms comme échelle de grandeur des parties fluctuantes, nous obtenons

$$\frac{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B}_1 \rangle} \sim \frac{v_{\text{rms}}}{V} \frac{b_{\text{rms}}}{B_1} \quad (\text{V.6})$$

Pour l'écoulement de von Kármán contrarotatif, le taux de turbulence est de l'ordre de $v_{\text{rms}}/V \sim 30\%$. Par ailleurs, pour l'expérience VKG en champ axial appliqué, on a $b_{\text{rms}} \sim 0.3\mathbf{B}_1$. Nous en déduisons que les effets de la turbulence sont au mieux de l'ordre de 10% des effets obtenus à l'ordre 2. Dans VKG, et pour un écoulement à 1 disque en rotation, l'effet Parker donne une contribution d'ordre 2 d'amplitude 5 G. On ne doit donc pas attendre un effet plus grand que 0.5 G, ce qui est faible mais pas indétectable lorsqu'on utilise le dispositif expérimental à sa limite de résolution.

V.1.3 Modélisation par la théorie de champ moyen

Pour pouvoir mesurer les effets d'induction des petites échelles de la turbulence, nous devons dans un cas idéal (qui est celui des simulations directes) connaître la vitesse et

le champ magnétique induit au même point. Il serait alors possible d'évaluer la quantité $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{B} \rangle - \langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle$. Malheureusement, une mesure précise et simultanée de ces deux quantités est très difficile dans un métal liquide, et nous devons nous contenter d'une mesure indirecte et globale du champ magnétique induit dans le cas d'un champ magnétique appliqué. Il nous faut donc avoir une idée de la manière dont répondent les petites échelles dans le cas d'un champ magnétique appliqué. La théorie de champ moyen [64, 50] apporte, lorsqu'il y a séparation d'échelle, un élément de réponse en exprimant \mathcal{E} comme une fonctionnelle du champ appliqué et de ses gradients. Cette théorie est donc analogue à la modélisation du tenseur de Reynolds en mécanique des fluides. Elle possède toutefois un avantage décisif sur le cas hydrodynamique puisque la fluctuation \mathbf{b} et la force électromotrice turbulente $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ sont linéaires par rapport au champ magnétique à grande échelle. Pour une turbulence homogène, isotrope, mais dans le cas de fluctuations qui ne sont pas invariantes par parité, le développement à l'ordre 1 s'écrit :

$$\mathcal{E} = \alpha(\mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{B} \rangle) - \beta \nabla \times (\mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (\text{V.7})$$

Ainsi modélisée, la contribution des petites échelles $\nabla \times \mathcal{E}$ ajoute deux termes sources à l'équation V.4 dont le champ induit $\langle \mathbf{B} \rangle$ est solution.

- L'effet β , associé au second terme de la relation V.7 prend en compte une modification du transport du champ magnétique par l'écoulement petite échelle sous la forme d'une diffusivité magnétique effective $\eta = \lambda + \beta$. Ce terme qui est un vrai scalaire, doit être présent dès lors que l'écoulement est turbulent. Lorsqu'il est positif, il correspond à une augmentation de la diffusivité effective du milieu et donc à une diminution des effets d'induction. Cependant il a été montré à partir d'une analyse multi-échelles sur des écoulements de Taylor-Green [51] que ce coefficient peut aussi être négatif, et conduire à l'obtention de l'instabilité dynamo à grande échelle.

- Le premier terme de la relation V.7, qui donne une relation de proportionnalité entre la force électromotrice turbulente et le champ magnétique à grande échelle, est associé à l'effet α . Il traduit l'induction d'un courant $\mathbf{J} = \sigma \alpha (\mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{B} \rangle)$ parallèle au champ magnétique moyen. Il est à noter que pour une turbulence homogène et isotrope, α est un pseudo-scalaire et qu'à ce titre il ne peut être différent de zéro que pour un écoulement qui n'est pas invariant par parité. C'est a priori le cas de la plupart des écoulements possédant une hélicité cinétique moyenne $\langle \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V} \rangle$, et c'est pourquoi l'effet α est presque toujours associé à la présence d'hélicité. Dans l'approximation de "first order smoothing" (voir annexe IX.5), la théorie de champ moyen permet même d'établir un lien formel entre l'hélicité et le coefficient α [64]. Cet effet coopératif est à la base de la plupart des modèles de dynamo astrophysiques. Son intérêt vient de ce qu'il fournit un terme source supplémentaire dans l'équation d'induction permettant de convertir un champ toroïdal en un champ poloïdal. Associé à l'effet Ω , qui permet facilement de convertir un champ poloïdal en un champ toroïdal, il est alors aisé d'imaginer un cycle dynamo fermé qui permet de construire des dynamos de type $\alpha - \Omega$. Cette idée a été particulièrement féconde en astrophysique pour la modélisation du champ magnétique à l'échelle galactique [75, 94].

Remarque : il convient à ce stade d’apporter une précision fondamentale sur la nature du problème qui nous préoccupe, à savoir l’observation d’un effet coopératif des mouvements à petite échelle. Nous l’avons défini comme la possibilité d’obtenir un champ magnétique induit

$$\langle \mathbf{B} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dt, \quad (\text{V.8})$$

différent de zéro, produit via la force électromotrice turbulente

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) dt. \quad (\text{V.9})$$

Dans le cas d’un écoulement stationnaire contraint par des tuyaux, et d’une définition des composantes grande échelle à l’aide d’une moyenne spatiale, la réalité de l’effet α a été montrée expérimentalement dans des systèmes présentant une nette séparation d’échelle [100]. Il est d’ailleurs le principal mécanisme d’induction de la dynamo α^2 de G.O. Roberts [88], qui est à la base de la dynamo de Karlsruhe [101]. Toutefois, les mécanismes d’induction mis en jeu dans ces expériences ne rentrent pas dans le cadre de ce que nous avons défini comme étant un effet de la turbulence. En effet, en nous basant sur la définition de la moyenne V.9, qui définit les composantes grandes échelles à partir d’une moyenne temporelle et non d’une moyenne spatiale, nous devons considérer l’écoulement de Karlsruhe comme un écoulement moyen grande échelle. Nous retrouverions d’ailleurs ce constat en définissant les quantités “grande échelle” à l’aide d’une moyenne spatiale sur une longueur L grande devant l’échelle de Taylor de la turbulence, mais petite devant la taille d’un tuyau. Il apparaît donc que la prévision du seuil de la dynamo de Karlsruhe faite à partir de la théorie de champ moyen [84], qui utilise une moyenne spatiale sur la taille de l’expérience (50 colonnes), modélise le comportement collectif de la structure en colonnes de l’écoulement moyen $\langle \mathbf{V} \rangle_T$, et non les effets de la turbulence. Ceci ne remet pas en cause l’approche de type champ moyen, mais démontre que les expériences (concernant l’effet α) réalisées à ce jour ne montrent pas l’existence d’une contribution des fluctuations turbulentes.

V.1.4 Stratégie expérimentale

Nous savons de l’étude des ordres de grandeur que si les fluctuations temporelles donnent un effet coopératif, il est forcément petit comparé aux effets d’induction dû au champ de vitesse moyen. Il nous faut donc trouver un champ \mathbf{B}_0 permettant d’obtenir un effet d’induction via le terme $\nabla \times \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$, mais qui donne un terme source $\nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{B}_0)$ égal à zéro, de telle sorte qu’aucun champ ne soit induit par un mécanisme grande échelle. Comme les écoulements que nous considérons possèdent en moyenne la symétrie de révolution, il se trouve qu’un tel champ existe et qu’il peut être réalisé expérimentalement. Il s’agit d’un champ toroïdal axisymétrique qui s’écrit en coordonnées cylindriques $\mathbf{B}_0 = B_0(r, z) \mathbf{e}_\theta$. De plus, si le résultat $\mathcal{E} = \alpha(\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}_0)$ provenant de la théorie de champ moyen doit s’appliquer dans l’expérience, elle permettra de convertir ce champ toroïdal appliqué en une boucle de courant électrique azimuthal qui sera source d’un champ poloïdal induit. La stratégie expérimentale devient alors claire. Prenant un écoulement qui possède de l’hélicité à grande échelle et la symétrie de révolution, nous allons mesurer le champ poloïdal induit dans le cas d’un champ orthoradial appliqué. Nous confronterons ensuite les effets d’induction obtenus dans cette configuration à ce

que nous connaissons des effets d'induction de l'écoulement moyen.

Nous présentons dans ce chapitre, les mesures que nous avons effectuées pour comprendre les mécanismes d'induction des petites échelles dans le cas d'un champ toroïdal appliqué dans deux écoulements différents, dans l'expérience VKG de Lyon, et dans l'expérience du tore de Perm. Ces deux expériences ont en commun d'utiliser le gallium, de présenter de hauts taux de turbulence, et d'avoir un écoulement moyen hélicitaire à grande échelle. Cette étude repose sur l'hypothèse qu'une partie de cette hélicité présente à l'échelle intégrale se retrouve transférée, au travers d'une cascade, vers des structures de tailles plus petites qui pourront donner une contribution aux mécanismes d'induction.

V.2 Induction aux petites échelles dans VKG

V.2.1 Mécanismes d'induction en champ toroïdal appliqué

Nous allons tout d'abord montrer que lorsque l'on applique un champ azimuthal de la forme $\mathbf{B}_0 = B_0(r, z)\mathbf{e}_\theta$ à un écoulement qui possède la symétrie de révolution, le champ induit est forcément azimuthal. Pour cela, nous considérons la vitesse \mathbf{V} , le courant \mathbf{J}_1 , et le champ induit \mathbf{B}_1 comme la somme de leurs composantes poloïdales et toroïdales. Nous noterons alors la vitesse $\mathbf{V} = \mathbf{V}^P + V^T\mathbf{e}_\theta$. Puisque les champs sont axisymétriques, les composantes du champ induit à l'ordre 1 sont solutions des équations :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_1^P &= \mu_0 \mathbf{J}_1^T \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1^P = 0. \\ \nabla \times \mathbf{B}_1^T &= \mu_0 \mathbf{J}_1^P. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Montrons alors que le courant électrique \mathbf{J}_1 ne possède pas de composante poloïdale. Puisque le champ appliqué est orthoradial, la force électromotrice est uniquement poloïdale, et s'écrit :

$$\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0^T = -B_0 V_z^P \mathbf{e}_r + B_0 V_r^P \mathbf{e}_z. \quad (\text{V.11})$$

Elle n'a aucune raison d'être à divergence nulle, de telle sorte qu'à cette force électromotrice va correspondre la création d'un potentiel électrique ϕ qui possèdera par construction la symétrie de révolution. La partie potentielle du courant $-\sigma \nabla \phi$ ne possèdera donc pas de composante azimuthale. Nous devons donc conclure que le courant électrique \mathbf{J}_1 obtenu à l'ordre 1 ne possède pas de composante toroïdale. Ainsi la composante poloïdale du champ induit à l'ordre 1 vérifiera dans tout l'espace :

$$\nabla \times \mathbf{B}_1^P = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1^P = 0. \quad (\text{V.12})$$

Il ne possède donc aucune source en quelque endroit que ce soit et doit être nul partout. Nous en déduisons donc que le champ induit à l'ordre 1 est nécessairement toroïdal. Puisque \mathbf{B}_1 possède la même structure que \mathbf{B}_0 le résultat sera donc vrai aussi pour \mathbf{B}_2 . Par récurrence, nous trouvons qu'à tout ordre aucune composante poloïdale ne pourra être induite dans le cas d'un champ toroïdal appliqué. Ce résultat négatif pour l'induction d'un champ poloïdal résulte donc de l'absence d'une création d'un courant toroïdal pour un champ azimuthal appliqué. Si l'effet α turbulent existe, il produira un tel courant, et ainsi permettra la conversion d'un champ azimuthal appliqué en un champ poloïdal induit.

V.2.2 Configuration de champ toroïdal dans l'expérience VKG

Pour obtenir un champ toroïdal azimuthal, il faut la présence d'un courant axial $\mathbf{J}_0 = J_0(r, z)\mathbf{e}_z$ très intense circulant au centre du cylindre. Pour réaliser un tel champ, plusieurs solutions sont possibles. Faire traverser à un câble le dispositif expérimental comme dans l'expérience du tore, fabriquer une bobine toroïdale comme pour l'expérience de magnétoconvection de Grenoble [46], ou enfin utiliser la nature conductrice du fluide pour faire traverser du courant électrique. Du fait de la présence d'arbres dans le

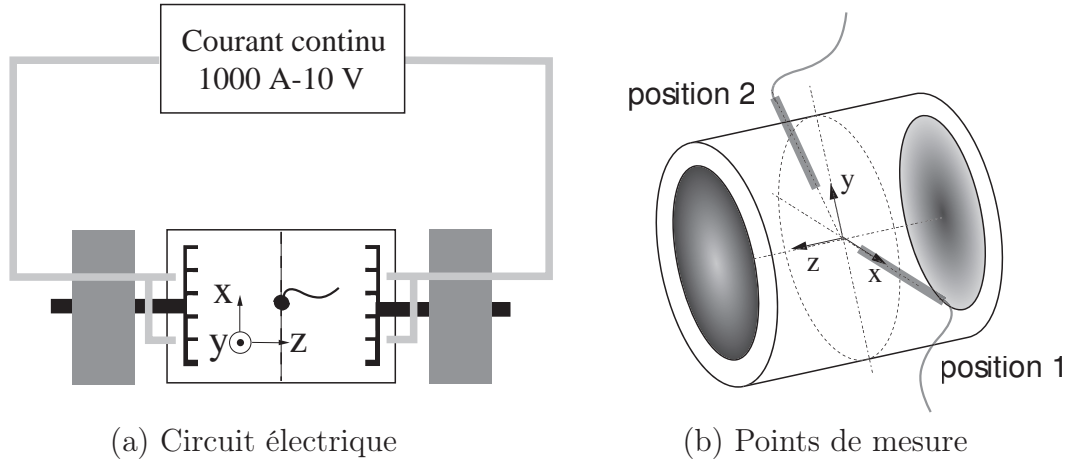


Fig. V.2: Configuration de champ toroïdal. Figure (a) : vue de dessus du dispositif expérimental. On peut apercevoir les câbles d'amenée du courant ainsi que les électrodes qui plongent dans le gallium. Le champ créé est composée d'une composante toroïdale axisymétrique d'amplitude 20 G et d'un champ parasite d'amplitude 1 G inhomogène et principalement dirigé selon \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z . Figure (b) : positions des points de mesure dans le plan médian. Comme dans la partie IV.1.3, les mesures ont été faites en $r = R/2$ le long de l'axe Ox (position 1, $\theta = 0^\circ$) et le long de l'axe décalé Oy' (position 2, $\theta = 108.5^\circ$).

dispositif VKG, les deux premières solutions sont techniquement difficiles à réaliser et nous avons utilisé la troisième méthode. Nous avons alors intégré deux électrodes de laiton disposées symétriquement à l'arrière de chaque disque comme le montre la figure V.2 et connecté l'ensemble à une alimentation stabilisée, modèle P63D-101000 fabriquée par POWER-TEN, pouvant délivrer un courant continu de 1000 A sous une tension maximale de 10 V. Les disques en acier étant percés de larges trous, ils ne perturbent pas le passage du courant axial. Ainsi, l'intensité I_0 du courant circulant dans les câbles se répartit dans le volume du cylindre pour donner une densité de courant électrique

$$\mathbf{J}_0 \sim \frac{I_0}{\pi R^2} \mathbf{e}_z. \quad (\text{V.13})$$

Dans le cylindre, ce courant axial crée donc une composante orthoradiale \mathbf{B}_0^T qui s'écrit en coordonnées cylindriques, et dans l'approximation d'une répartition uniforme des courants :

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{V.14})$$

En utilisant le courant maximal autorisé par l'alimentation continue, le dispositif peut créer un champ orthoradial d'amplitude 20 G en bord de cuve. En observant la figure

V.2, nous voyons que l'ensemble du dispositif constitue une boucle de courant unique. Pour limiter la présence d'un champ parasite provenant des câbles, nous avons utilisé une grande boucle constituée de deux tronçons de 6 m chacun. Malgré toutes les précautions prises, nous avons pu établir la présence d'une composante parasite \mathbf{B}_0^A venant des câbles et du champ magnétique terrestre. Elle est d'amplitude 1 G et brise l'axisymétrie du champ appliqué. Nous l'avons mesurée dans le plan médian en $r = R/2$ et avons trouvé

$$B_x^A \sim -0.1 \text{ G} \quad B_y^A \sim 0.5 \text{ G} \quad B_z^A \sim 0.6 \text{ G} \quad \text{pour } r = \frac{R}{2}$$

Le champ appliqué est donc constitué du champ toroïdal d'amplitude 20 G et d'une composante parasite transverse d'amplitude 0.5 G. Cette dernière est fortement inhomogène dans l'espace puisque qu'elle est dominante près des câbles. Comme lors de l'étude des effets d'induction en champ transverse, nous avons mesuré la conversion du champ azimuthal appliqué en un champ axial induit en deux points de mesure du plan médian (figure V.2). Le premier point de mesure (noté 1) se trouve sur l'axe \mathbf{e}_x en $(r = \frac{R}{2}, \theta = 0, z = 0)$, et le second (noté 2) se situe sur la partie haute du dispositif au point $(r = \frac{R}{2}, \theta = 108.5^\circ, z = 0)$. Les mesures ont donc été faites aux mêmes points que pour la configuration de champ transverse que nous avons discutée en section IV.1.3. Les résultats que nous exposons dans le paragraphe suivant doivent donc être comparés à ceux obtenus dans cette configuration de champ appliqué.

V.2.3 Mesures de l'induction axiale en champ toroïdal appliqué

symétrie des effets attendus : lors de l'étude de la configuration de champ transverse dans VKG, nous avons observé que les effets d'induction sont souvent complexes. Pour interpréter ces derniers, nous avons alors eu recours aux transformations de l'écoulement lors d'un renversement de la fréquence de rotation, ou encore lors d'un échange des disques. Nous allons à nouveau utiliser les symétries des effets d'induction pour l'interprétation des résultats expérimentaux. Nous devons donc connaître les propriétés de symétrie de la force électromotrice turbulente $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$. Cette dernière étant liée à la présence de structures hélicitaires aux petites échelles, nous sommes amenés à postuler qu'elle possède les mêmes symétries que l'hélicité des petites échelles. La force électromotrice $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ aura alors les mêmes symétries que l'hélicité à grande échelle $\langle H \rangle = \int \langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla \times \langle \mathbf{V} \rangle d^2\mathbf{r}$, ce qui implique que le champ induit par effet α doit avoir les mêmes symétries que le champ induit par effet Parker. Nous cherchons un champ axial induit, impair par rapport à la fréquence de rotation et qui ne change pas lorsqu'on tourne 1 disque plutôt que l'autre. De plus comme le champ toroïdal appliqué possède une structure axisymétrique, le champ induit devra posséder la symétrie de révolution et donc être identique aux points 1 et 2.

Analyse des résultats obtenus : les figures V.3 (a), (b) et (c) représentent les mesures de l'induction axiale obtenues au point 1 en $r = R/2$ sur l'axe Ox , et les figures V.3 (d), (e) et (f) représentent les mesures réalisées au point 2 (au dessus) à 18.5° de l'axe Oy . Pour la lisibilité, nous avons organisé les six courbes comme sur la figure IV.7. Les figures montrent l'évolution de la moyenne temporelle de l'induction axiale en fonction de Ω lorsque seul le disque gauche est en rotation (figures (a) et (d)), lorsque les deux disques sont en contrarotation (figures (b) et (e)), et enfin lorsque seul le disque droit

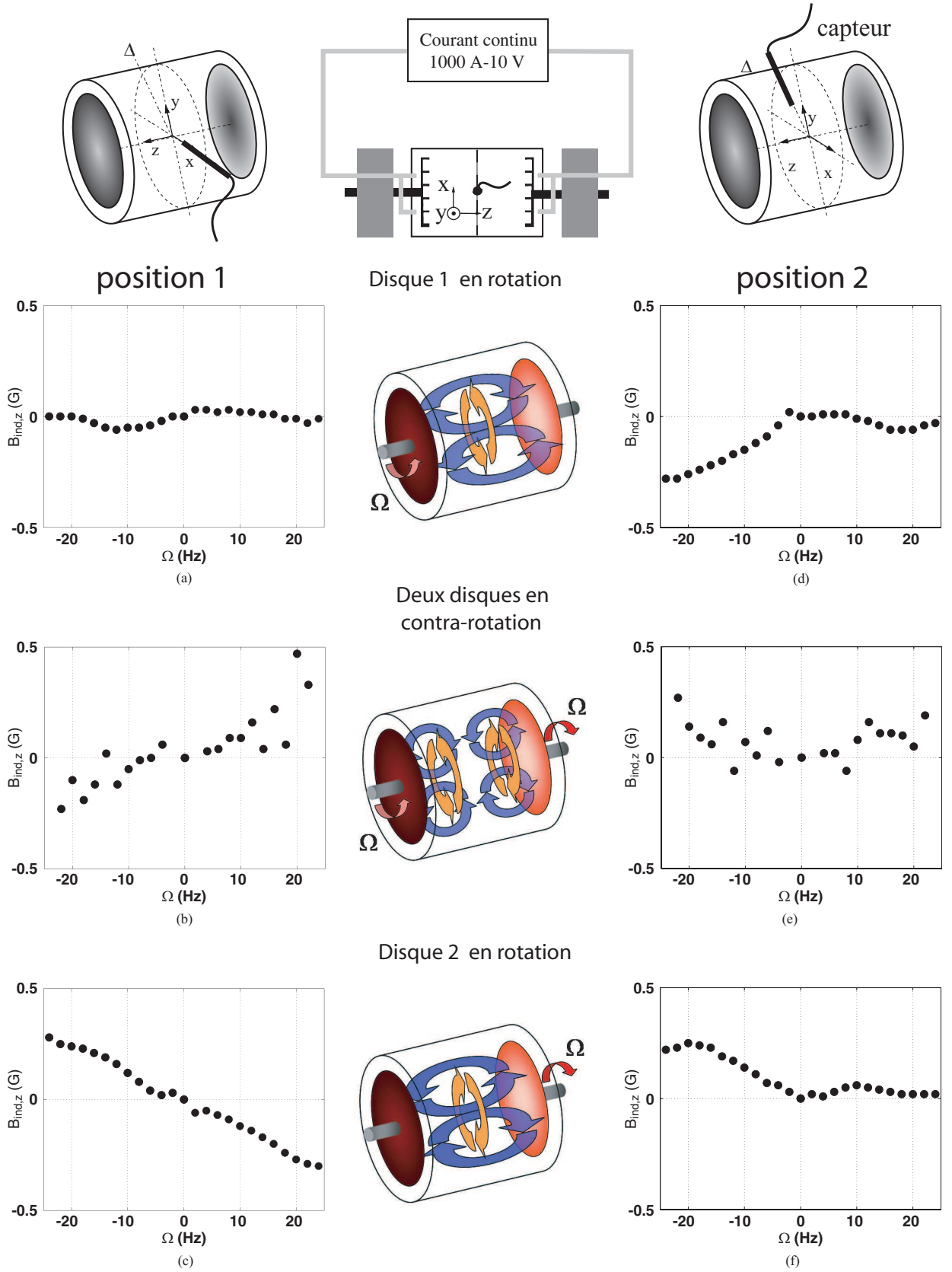


Fig. V.3: Mesures d'induction magnétique axiale en présence d'un champ appliqué azimuthal. Les figures (a),(b) et (c) correspondent à des mesures faites au point ($r = 0.5R, \theta = 0, z = 0$) de l'axe Ox et les figures (d),(e) et (f) à des mesures faites au point ($r = 0.5R, \theta = 108.5^\circ, z = 0$) de l'axe Oy' proche de Oy .

est en rotation (figures (c) et (e)). Nous pouvons constater que les différentes courbes ne montrent pas la similarité de comportement que l'on aurait pu attendre de l'étude des symétries du paragraphe précédent. Nous observons même des résultats surprenants que l'on peut résumer en trois points :

- au point 1 lorsque seul le disque 2 est en rotation (figure V.3 (c)), nous mesurons une induction axiale impaire de Ω qu'on ne retrouve pas sur la figure V.3 (a) lorsque seul le disque 1 est en rotation.
- Au point 2 (figures V.3 (d) et (f)), le comportement est différent : le changement de disque se traduit par un renversement des effets d'induction.
- Lorsque l'écoulement est contrarotatif (figure V.3 (b) et (e)), nous constatons que les effets d'induction montrent un aspect bruité, et qu'ils changent de parité lorsqu'on passe du point 1 au point 2.

Nous constatons donc l'absence d'une induction axiale ayant les symétries attendues pour l'effet des petites échelles. Puisque la symétrie de révolution a été brisée, et que les points 1 et 2 ne sont pas équivalents, nous devons attribuer ces effets d'induction au faible champ vertical (d'amplitude 1 G) et inhomogène provenant des câbles. En effet, nous savons de l'étude de la section IV.1.3, que lorsqu'un champ transverse est appliqué dans la direction \mathbf{e}_x , on obtient une forte composante axiale impaire au point 2. Tournant de 90° la direction du champ appliqué, on doit donc observer comme le montre la figure IV.7 (b), une composante B_z impaire fonction de Ω au point 1. Toutefois, les courbes obtenues ici se comparent difficilement à celles exposées en section IV.1.3, qui ont été obtenues en champ transverse homogène. Une explication possible réside dans les forts gradients du champ parasite qui peuvent contribuer à l'induction moyenne.

Remarque : nous avons vu lors de l'étude des effets de conversion d'un champ transverse en une induction axiale qu'on obtenait un champ induit d'amplitude 5 G pour un champ appliqué de 40 G et une vitesse de rotation $\Omega = 10$ Hz. Supposant que c'est le champ parasite d'amplitude 1 G qui est à l'origine des effets mesurés, on retrouve l'ordre de grandeur 0.1 G de l'amplitude du champ induit mesuré. L'interprétation à partir du champ transverse semble donc cohérente.

Lorsque l'écoulement est contrarotatif, que le champ appliqué soit toroïdal (figure V.3), ou encore transverse (figure IV.7), l'évolution de l'induction moyenne en fonction de Ω présente un aspect très bruité. A l'époque de ces mesures (au début de la thèse), nous n'avions aucune connaissance de la présence des structures basses fréquences au sein de l'écoulement et nous utilisons une durée d'acquisition de 30 s pour calculer la moyenne temporelle des signaux. Ce n'est donc pas dans la limite de résolution du dispositif (qui est de l'ordre de 0.01 G) qu'il faut chercher l'origine du bruit sur les courbes V.3 ((b),(e)), mais dans l'utilisation d'un temps trop court pour définir correctement la moyenne temporelle. Ces structures dont l'origine se trouve dans la présence de la couche de mélange étant absentes des écoulements obtenus lorsqu'un seul des disques est en rotation, il est donc normal que les figures ((a), (c), (d), et (f)) ne présentent pas le même aspect bruité. Toutefois l'utilisation d'un temps plus grand pour la moyenne des signaux ne changerait pas la conclusion quant à l'absence d'un effet d'induction possédant les symétries de l'hélicité.

V.2.4 Conclusions sur l'effet coopératifs des fluctuations turbulentes dans VKG

Cette étude nous a montré qu'aucun mécanisme de conversion clair d'un champ azimutal en un champ moyen axial par les fluctuations turbulentes de l'écoulement ne peut être distingué des effets du champ parasite provenant des câbles. Une conclusion amère s'impose donc : nous n'avons pas pu détecter dans l'écoulement VKG la présence d'un effet de la turbulence aux R_m et Re considérés. Afin de déterminer si l'absence d'une contribution des petites échelles est propre aux écoulements de von Kármán, ou si elle constitue un résultat plus général, nous avons décidé d'un commun accord avec l'équipe dynamo de P. Frick à Perm, de poursuivre cette quête dans l'écoulement instationnaire du tore. Ce dernier étant organisé à grande échelle en une hélice bouclée sur elle même, il apparaît comme le meilleur générateur d'hélicité à petite échelle qu'on puisse imaginer.

V.3 Induction aux petites échelles dans l'expérience du tore

Notre étude des mécanismes d'induction en champ axial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ a montré que l'effet d'induction dominant est dû à la composante poloïdale \mathbf{V}^P . Elle étire les lignes de champ de \mathbf{B}_0 pour induire une composante radiale d'amplitude 2 G au voisinage du tore lorsque le champ appliqué est d'amplitude 45 G. Du fait de la géométrie toroïdale, il nous a été impossible de mesurer l'amplitude de la composante Parker, qui ne peut pas exister en dehors du canal. Toutefois, nous avons pu constater la présence d'une composante axiale d'ordre 2, d'amplitude 0.3 G, qui est due au mécanisme d'expulsion du champ localement transverse au vortex. L'ensemble de ces mesures permet donc d'avoir un étalon de comparaison pour la mesure des effets d'induction en champ toroïdal. Munis de l'amplitude typique des effets d'ordre 2, nous pouvons refaire le raisonnement de la section V.1.2 pour obtenir l'ordre de grandeur de l'effet des mouvements à petite échelle. On trouve alors que pour un champ appliqué d'amplitude 40 G, l'amplitude du champ poloïdal induit ne sera pas plus grande que 0.03 G. Pour mesurer précisément un effet aussi faible, nous allons donc utiliser de nouvelles méthodes de mesure, dont nous allons voir qu'elles sont beaucoup plus précises.

V.3.1 Configuration de champ toroïdal

Contrairement à la configuration de champ toroïdal dans l'expérience VKG, nous utilisons un courant électrique axial circulant parallèlement à l'axe de rotation du tore, au travers d'un barreau de cuivre cylindrique de 1.5 cm de diamètre pour 2 m de long. La figure V.4 montre les améliorations apportées par rapport au dispositif utilisé à Lyon. Le circuit électrique est organisé en deux boucles de 3 m de côté. Elles sont symétriques et disposées dans un plan horizontal, ce qui améliore considérablement la géométrie du champ appliqué. Nous alimentons séparément chaque boucle de courant avec un accumulateur délivrant 750 A, ce qui permet d'obtenir un champ toroïdal d'amplitude 35 G à l'intérieur de la coque en acier. Malgré la meilleure symétrie de l'arrangement du circuit, le champ

n'est pas parfaitement toroïdal et il existe une composante parasite verticale de nombre d'onde azimutal $m = 1$ dont l'amplitude est environ 3 G.

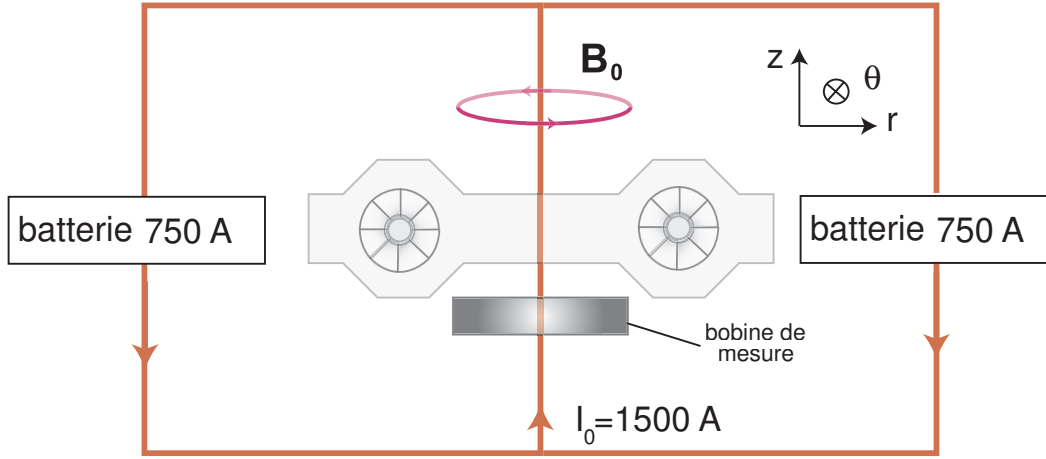


Fig. V.4: Montage symétrique permettant d'obtenir un champ toroïdal Les câbles sont organisés en deux boucles de courant situées dans un plan horizontal. Elles sont symétriques de manière à minimiser l'écart à la symétrie de révolution, chacune est alimentée séparément par une batterie pouvant délivrer 750 A.

Pour mesurer le champ induit, nous avons utilisé une sonde Fluxgate 3-axes qui possède une sensibilité 4 V.G^{-1} , ce qui est suffisant pour résoudre un champ de 1 mG lorsqu'on utilise un préamplificateur. Nous avons alors effectué les mesures en deux points fixes dans le référentiel du laboratoire dont les positions sont $(r = 8.7 \text{ cm}, \theta = 0^\circ, z = 6.5 \text{ cm})$ et $(r = 8.7 \text{ cm}, \theta = 90^\circ, z = 6.5 \text{ cm})$. Elles sont matérialisées par les deux étoiles figure V.5. En ces deux points, le champ magnétique imposé vaut alors respectivement $(B_r = -1.2 \text{ G}, B_\theta = 27 \text{ G}, B_z = 3.9 \text{ G})$ pour $\theta = 0$ et $(B_r = 3.6 \text{ G}, B_\theta = 33.5 \text{ G}, B_z = -0.8 \text{ G})$ pour $\theta = \pi/2$. La composante parasite est donc constituée de deux composantes d'amplitudes voisines, l'une verticale et l'autre axiale, qui possèdent une dépendance angulaire de nombre d'onde $m = 1$.

Comme le dispositif du tore donne des effets d'induction transitoires, il est aussi possible de les mesurer à l'aide d'une bobine qui détecte la variation de flux au travers de ses spires. Nous avons utilisé une bobine d'axe de révolution \mathbf{e}_z disposée dans le plan $z = 6.5 \text{ cm}$ (figure V.4), pour enregistrer l'évolution temporelle de la composante axiale du champ induit. Le rayon de la bobine est $R_B = 5 \text{ cm}$, et elle possède environ 10000 spires (bobinées à la main par V. Noskov !). Le signal est malgré tout très faible et nous avons dû l'amplifier avec un gain $G = 200$ avant acquisition. Il s'agit donc d'une mesure intégrale qui ne retient que la composante axisymétrique de B_z en intégrant les variations du champ magnétique sur la surface $S = \pi R_B^2$ de la bobine. Définissant l'induction axiale moyennée $\overline{B}_z(t)$ comme :

$$\overline{B}_z(t) = \frac{1}{S} \iint_S B_z(t) dS, \quad (\text{V.15})$$

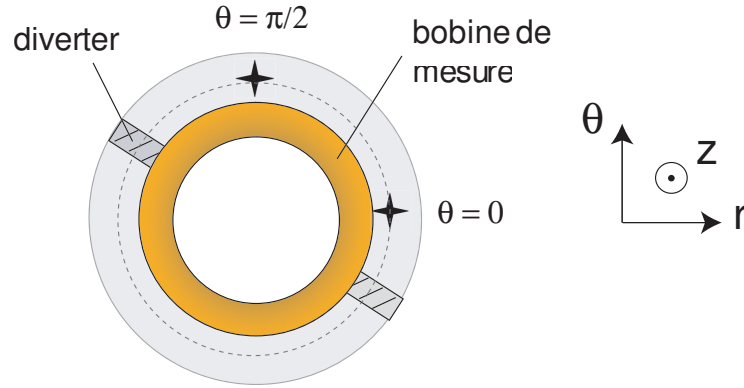


Fig. V.5: Disposition de la bobine de mesure et positions des sondes fluxgate : la bobine est centrée par rapport au tore et située dans le plan $z = 6$ cm. Nous avons effectué des mesures locales en deux points fixes ($r = 8.7$ cm, $\theta = 0^\circ$, $z = 6.5$ cm) et ($r = 8.7$ cm, $\theta = 90^\circ$, $z = 6.5$ cm).

nous pouvons déduire que la bobine délivre une tension :

$$U(t) = -NSG \frac{d\overline{B}_z(t)}{dt}. \quad (\text{V.16})$$

Il est possible de reconstruire l'évolution du champ magnétique $\overline{B}_z(t)$ en intégrant le potentiel en fonction du temps. Notant $\langle U \rangle_T$ la moyenne du signal sur la durée de l'acquisition (provenant des divers offsets), nous avons calculé le champ magnétique induit selon la formule :

$$\overline{B}_z(t) = -\frac{1}{NSG} \int (U(t) - \langle U \rangle_T) dt \quad (\text{V.17})$$

Le temps de décroissance du signal étant $\delta t = 1$ s et la résolution sur la différence de potentiel de l'ordre de $U_0 = 1$ mV, nous voyons qu'il est possible de détecter un champ magnétique moyenné d'amplitude :

$$\overline{B} = \frac{1}{NSG} \frac{U_0}{\delta t} \sim 1 \text{ mG} \quad (\text{V.18})$$

La résolution du dispositif semble donc suffisamment bonne pour détecter le champ induit par les petites échelles. Un instrument de mesure aussi sensible aux variations de flux est d'ailleurs un problème du fait de l'utilisation de forts courants dans les câbles. En effet, puisqu'il circule un courant de 1000 A sous une différence de potentiel de 1 V, les câbles doivent dissiper une puissance de l'ordre de 1 kW. Ceci se traduit par une augmentation de leur température au cours des mesures, qui fait augmenter la résistance du circuit, et donc diminuer le courant imposé dans le circuit. L'amplitude du champ appliqué diminue alors faiblement, et provoque variation de flux parasite (nous l'avons vérifié). Pour limiter le chauffage, et donc éviter ce phénomène, nous avons limité la présence du courant aux 5 secondes que dure une acquisition. L'amplitude du champ \mathbf{B}_0 reste alors constante au cours de chaque acquisition.

V.3.2 Effets attendus

Comme nous l'avons vu, le champ appliqué orthoradial n'interagit pas avec l'écoulement axisymétrique à grande échelle. Les effets d'induction que l'on peut dès lors attendre sont alors de trois types :

- effets de la turbulence homogène : il s'agit de l'effet de l'hélicité à petite échelle, qui doit posséder les symétries de l'hélicité à grande échelle, et donner un effet d'induction de l'ordre de 30 mG.

- Instabilité du mouvement à grande échelle : lors de la phase de décroissance de la vitesse, on peut observer à l'oeil dans le prototype utilisant de l'eau que l'écoulement à grande échelle se déstabilise. Dans le régime de décroissance lente, la ligne neutre autour de laquelle les trajectoires s'enroulent (figure III.17), et qui possède initialement la forme d'un cercle se déforme en une spirale dont le nombre d'onde azimutal varie d'une expérience à l'autre entre $m = 3$, pour lequel l'écoulement en présence de bulle prend l'aspect d'un triangle, et $m = 5$, pour lequel on obtient une forme pentagonale. Or lorsque l'hélice affecte la forme d'une spirale, le champ toroïdal ne lui est plus parallèle et il redevient possible d'obtenir un effet Parker. Cet effet, s'il existe (et nous n'avons que des arguments qualitatifs pour le justifier) devrait à notre sens posséder deux caractéristiques. Il ne devrait se développer que dans la phase de décroissance lente et posséder les symétries de l'hélicité du champ moyen. Si on suppose que pour cet effet d'ordre 2, la vitesse est de l'ordre de $0.3V_{\max}$, nous trouvons que son amplitude doit être de l'ordre de 30 mG.

- Inhomogénéité aux temps courts : il a été observé expérimentalement que lors de la phase de freinage qui dure un temps de l'ordre de 0.1 s, l'écoulement présente une structure non axisymétrique. L'amplitude de la composante poloïdale de la vitesse est grande en aval des diverters alors qu'elle est nulle en amont. Ce gradient azimutal des propriétés de l'écoulement fournit deux mécanismes d'induction possibles. Le premier à grande échelle, puisque l'écoulement présente de la rotation différentielle, et le second à petite échelle puisque rien n'interdit la présence d'un effet α provenant d'un gradient des propriétés de la turbulence dans le tore. Il semblerait même, selon une conjecture de K.-H. Rädler (non publiée, non commentée après questions), que la présence de cette turbulence inhomogène soit nécessaire à la présence d'effet α dans le tore. Si l'effet de rotation différentielle possède les mêmes symétries que l'hélicité (nous le verrons en détail dans la suite), la question des symétries de l'effet de la turbulence inhomogène reste toutefois ouverte puisqu'il apparaît difficile, sans bases théoriques fiables, de savoir si c'est l'hélicité ou une autre quantité (le gradient d'hélicité : $\partial_\theta H$?) qui doit intervenir. En l'absence de donnée hydrodynamiques, il n'est pas possible d'évaluer l'amplitude de ces deux effets a priori.

V.3.3 Résultats expérimentaux

Les figures V.6 (a), (b) et (c) montrent l'évolution au cours du temps de l'induction axiale moyenne \overline{B}_z dans les trois configurations d'étude, et pour des vitesses de rotation positives et négatives égales en module à 45 Hz. Chaque courbe résulte de la moyenne sur 10 acquisitions, et l'instant de fin de freinage a été arbitrairement fixé comme origine des temps. Contrairement aux courbes de la figure IV.16, nous voyons une forte variation

du champ magnétique avant freinage. Celle-ci résulte des variations de flux lors de l'arrêt du courant dans l'électroaimant que l'on peut apercevoir en figure III.14. Elle est donc présente même lorsque le tore est vide, et ne contient aucune information sur le mouvement du liquide. Nous ne considérerons donc que les variations du champ induit pour les temps positifs, *i.e.* une fois le tore stoppé.

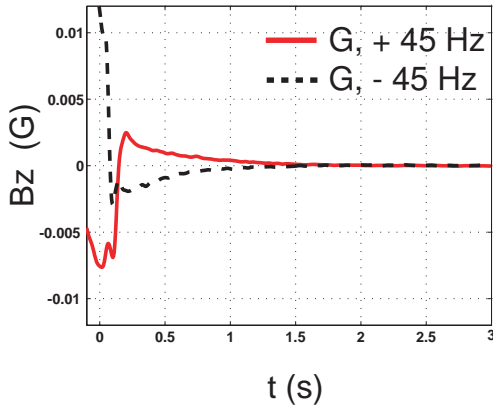
Nous constatons qu'après arrêt du tore, le signal est beaucoup plus important lorsque les diverters sont présents que lorsque les diverters sont absents. Ceci indique que les effets d'induction dus à l'action de la vitesse moyenne \mathbf{V}^T donnent une contribution nulle au travers de la bobine. De plus, il semble que le champ magnétique induit se divise en deux composantes évoluant sur des échelles de temps différentes. La première qui présente une évolution lente, à l'échelle de la seconde, possède les symétries de \mathbf{V}^P puisqu'elle se renverse lors d'un changement du sens de rotation ou lors d'un échange des diverters, et la seconde qu'on aperçoit sur les figures V.6 (c), et V.6 (a), qui ressemble à un pic localisé juste après l'arrêt du tore.

Puisque nous cherchons un effet de l'hélicité, qui doit donc être pair fonction de f , et se renverser lorsqu'on change les diverters (tableau IV.1), nous avons décomposé l'induction axiale en sa partie paire et sa partie impaire fonction de la fréquence de rotation. On obtient alors les figures V.6 (d), (e), (f) qui montrent l'évolution temporelle de ces deux composantes pour chacune des trois configurations expérimentales étudiées.

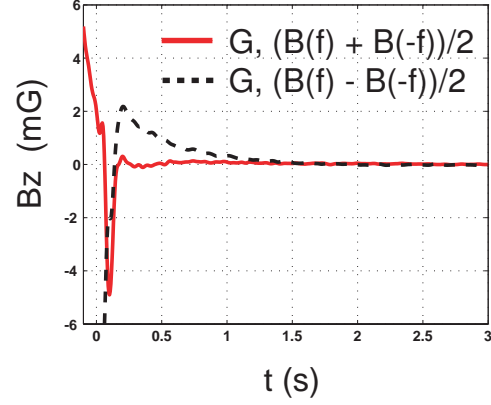
Le résultat que nous suspicions lors de l'analyse de la figure V.6 (c) apparaît alors nettement. Le champ axial induit comporte bien deux composantes qui évoluent avec des temps caractéristiques très différents.

- La première $\overline{B}_i = (\overline{B}_z(f) - \overline{B}_z(-f))/2$ est impaire fonction de f , et évolue avec le même temps caractéristique que l'écoulement grande échelle. Son amplitude est de l'ordre de 2 mG et ses symétries dans un changement de diverters sont celles de la composante \mathbf{V}^P . Elle possède donc tous les attributs du champ induit dans le cas d'un champ appliqué transverse que nous avons étudié dans la partie précédente. De l'étude de la configuration de champ axial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, nous savons qu'au voisinage du plan contenant la bobine, l'amplitude du champ axial induit est égale à 0.2 G pour un champ appliqué de 40 G. Nous en déduisons qu'il suffit qu'une faible composante axisymétrique parasite $B_{0,z} \sim 0.5$ G existe pour qu'un champ de 2 mG axisymétrique ayant les symétries de \mathbf{V}^P soit induit. Or nous savons qu'un tel champ parasite (axial et axisymétrique) existe puisque la bobine peut capter la dérive du champ appliqué lorsque les câbles chauffent. Nous en concluons que du fait de la disposition de la bobine dans le plan $z = 6.5$ cm, nous mesurons un champ induit d'ordre 1 provenant de l'interaction de \mathbf{V}^P et d'un faible champ transverse axisymétrique provenant des câbles.

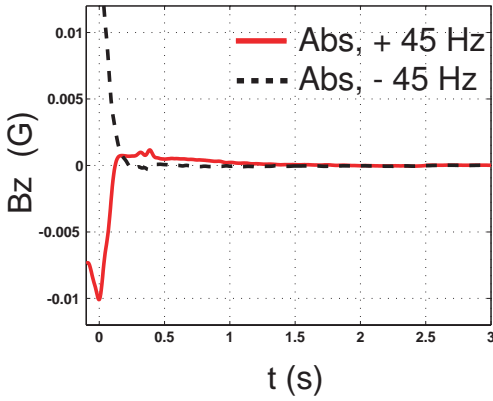
- La seconde $\overline{B}_i = (\overline{B}_z(f) + \overline{B}_z(-f))/2$ est paire fonction de f , d'amplitude crête est de l'ordre de 5 mG, et évolue avec un temps caractéristique $\tau \sim 50$ ms très court devant le temps de décroissance hydrodynamique de l'écoulement. Cet effet, qui se renverse lorsque l'on change la nature des diverters, possède donc les mêmes symétries que l'hélicité. Du fait de sa localisation aux temps courts juste après l'arrêt du tore, on en déduit que son origine se trouve dans le gradient azimutal des propriétés de l'écoulement. Toutefois son origine turbulente n'est pas évidente et il existe une autre source de champ axial que nous avons négligée pour l'instant et qui possède les mêmes symétries. Il s'agit de la rotation différentielle qui existe lors de la phase de freinage. Dans cette phase, la vitesse poloïdale



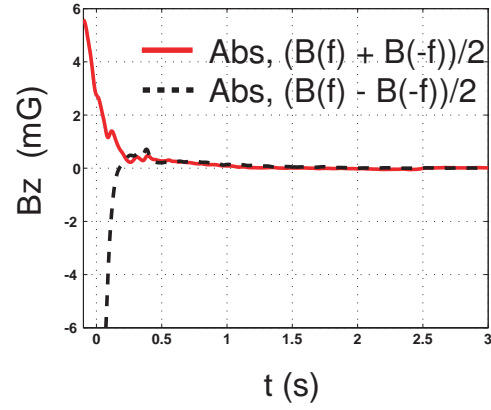
(a) Diverters gauches



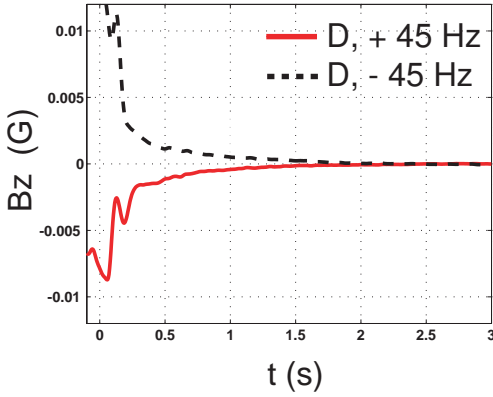
(d) Diverters gauches



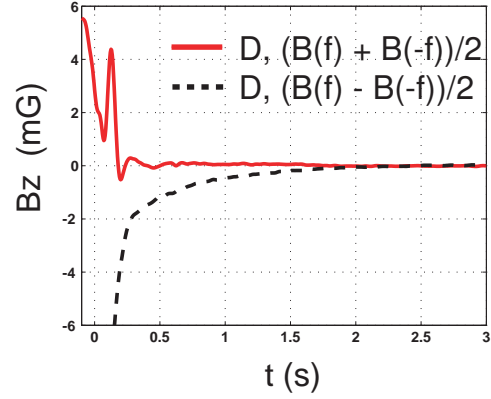
(b) Diverters absents



(e) Diverters absents



(c) Diverters droits



(f) Diverters droits

Fig. V.6: Champ magnétique obtenu après intégration du signal délivré par la bobine. Figures (a), (b), et (c) : évolution temporelle de \overline{B}_z pour des fréquences de rotation $f = \pm 45$ Hz dans les configurations : (a) diverters gauches, (b) sans diverters, (c) diverters droits. Les courbes ont été moyennées sur 10 réalisations. Ligne pleine (-), fréquence positive, ligne tiretée (- -), fréquence négative. Figures (d), (e), et (f) : décomposition paire-impair des signaux obtenus. Ligne pleine (-), partie paire $(\overline{B}_z(f) + \overline{B}_z(-f))/2$, ligne tiretée (- -), partie impaire $(\overline{B}_z(f) - \overline{B}_z(-f))/2$.

est nulle en amont du diverter, et non nulle en aval. Puisque le champ appliqué est de la forme $B_0 \mathbf{e}_\theta$, en notant $\mathbf{V}^P(r, \theta, z)$ la composante poloïdale du champ de vitesse (qui dépend maintenant de l'azimut), nous obtenons que le champ induit à l'ordre 1 qui s'écrit comme solution de l'équation :

$$\lambda \Delta B_z = -B_0 \partial_\theta V_z^P. \quad (\text{V.19})$$

On peut alors montrer que cet effet possède les mêmes symétries que l'hélicité. Pour cela notons tout d'abord que le module de cette composante est toujours le plus grand en aval du diverter. Ainsi lorsqu'on renverse la direction de rotation du tore, on change à la fois V_z^P en son opposé, et ∂_θ en $-\partial_\theta$. Le signe du gradient ne change donc pas lors du changement $f \rightarrow -f$. Par ailleurs, lorsqu'on échange les diverters en gardant le sens de rotation fixe, on change V_z^P en son opposé sans changer ∂_θ , ce qui se traduit par une inversion de l'effet. En moyennant l'équation précédente sur la surface de la bobine, on obtient :

$$\lambda \Delta \bar{B}_z = -\frac{1}{S} \int_0^{R_B} \int_0^{2\pi} (B_0 \partial_\theta V_z^P) r d\theta dr. \quad (\text{V.20})$$

Cette équation montre qu'il faut que le champ imposé possède la symétrie de révolution, ou une structure en quadrature avec celle du gradient azimutal de la vitesse poloïdale, pour que la moyenne azimutale $\langle B_0(\theta) \partial_\theta V_z^P \rangle_\theta$ soit nulle. Du fait de la nature complexe du champ appliqué, il y a peu de chance pour que cette condition soit réalisée, et la présence d'un tel effet ne peut pas être exclue. Il est donc difficile de trancher quant à l'origine turbulente de la composante paire obtenue.

Remarque : il est à noter qu'une nouvelle campagne de mesure est prévue en Russie, qui utilise un champ toroïdal généré par une bobine toroïdale enroulée autour du tore. Cette expérience dont nous ne possédons que des résultats préliminaires, et qui utilise un champ appliqué possédant la symétrie de révolution, devrait permettre de trancher.

V.3.4 Borne supérieure pour l'effet α

Nous avons ainsi mesuré un effet possédant les bonnes symétries, que nous n'avons pas pu attribuer avec certitude à un effet du champ de vitesse à grande échelle. Si nous supposons que cet effet peut être attribué aux mouvements à petite échelle, nous pouvons utiliser l'amplitude de ce champ induit pour obtenir une estimation du coefficient α . Cette estimation sera donc une borne supérieure.

Supposons donc que la composante \bar{B}_z est induite par une densité de courant $\mathbf{J} = \sigma \alpha B_0 \mathbf{e}_\theta$ uniformément réparti dans le tore. Notant R le grand rayon du tore, et r son petit rayon, l'intensité du courant sera alors $I_\alpha = \pi r^2 J$. Nous pouvons alors obtenir l'estimation recherchée puisque le système est équivalent à une spire unique de rayon R parcourue par un courant d'intensité I_α . Le champ obtenu en son centre est alors :

$$\bar{B}_z = \frac{\mu_0 I_\alpha}{2R} = \frac{\alpha \pi r^2}{2\lambda R} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2\lambda R}{\pi r^2} \frac{\bar{B}_z}{B_0} = 3.10^{-3} \text{m.s}^{-1} \quad (\text{V.21})$$

En comparant cette valeur à l'amplitude $V \sim 25 \text{ m.s}^{-1}$ de la vitesse à grande échelle, nous voyons que :

$$\left[\frac{\alpha}{V} \right]_{\max} \sim 10^{-4}. \quad (\text{V.22})$$

Les effets d'induction obtenus sont donc faibles et si nous voulons les comparer aux effets d'ordre 2 obtenus précédemment, nous trouvons que $\overline{B_z}/B_2 \leq 1\%$. Puisque ce résultat constitue une borne supérieure pour l'effet des petites échelles, nous pouvons conclure de cette étude que celles-ci sont trop peu efficaces pour être d'une quelconque aide pour générer un champ par effet dynamo dans l'expérience du tore.

V.4 Conclusion de l'étude

Tout au long de ce chapitre nous avons étudié la possibilité d'une contribution cohérente des mouvements à petite échelle. Dès le début de l'étude nous avons remarqué que la contribution recherchée allait être faible, puisque nous l'avions estimée à 10% des effets d'ordre 2. La démarche suivie a donc consisté à trouver une configuration expérimentale permettant une mesure en l'absence des effets du champ de vitesse moyen d'une part, puis en l'utilisation d'outils de mesure de plus en plus fins d'autre part. Dans l'expérience du tore, nous avons ainsi atteint une précision de l'ordre de $1/10000^e$ du champ appliqué, ce qui est largement suffisant pour résoudre l'effet recherché.

Il ressort des deux études menées à la fois dans les écoulements de von Kármán, et dans l'écoulement du tore, que les effets d'induction des petites échelles sont en fait inférieurs à 1% des effets d'ordre 2, ce qui représente une borne supérieure dix fois plus petite que l'estimation initiale. Comparés aux mécanismes de l'écoulement moyen, les effets d'induction des mouvements à petite échelle nous apparaissent donc inefficaces pour induire un champ magnétique à grande échelle. Ce résultat, qui est une borne supérieure pour les effets de la turbulence, peut être remis en perspective dans le cas de l'instabilité dynamo. Il fait écho au résultat de Ponty et collaborateurs [82] qui ont montré numériquement que le seuil d'un écoulement de Taylor-Green n'évolue plus dès lors que l'écoulement est turbulent, et qu'il peut être prédit à l'aide du seul écoulement moyen $\langle \mathbf{V} \rangle_T$.

Nous concluons sur ce commentaire : le résultat expérimental obtenu, qui montre l'inefficacité de la turbulence pour amplifier un champ magnétique, réconcilie l'approche de dynamo petite échelle [92], qui prévoit une divergence du seuil de la dynamo dans la limite $P_m \rightarrow 0$, et l'approche de type grande échelle qui prévoit une valeur finie pour le seuil [82] dans cette même limite. En effet dans les deux cas, il nous apparaît que lorsque P_m devient très faible, la turbulence n'est plus assez efficace pour générer le champ magnétique. C'est donc la seule présence d'un écoulement moyen capable d'amplifier un champ magnétique qui fait la différence.

Chapitre VI

Fluctuations du champ magnétique à grande échelle

VI.1 Observations qualitatives

Dans les chapitres précédents, nous avons rappelé les mécanismes d'induction élémentaires basés sur la topologie de l'écoulement de von Kármán contrarotatif. Nous avons alors décrit le champ magnétique induit moyenné dans le temps $\langle \mathbf{B} \rangle_T$ à l'aide de l'écoulement moyen uniquement et montré que le processus d'induction était un processus géométrique ne dépendant que de la topologie de $\langle \mathbf{V} \rangle_T$. Nous nous sommes ensuite intéressés aux effets d'induction des grandes fréquences temporelles du champ de vitesse *i.e.* aux effets de la turbulence. Nous avons alors observé dans deux expériences distinctes que dans une large part, les fluctuations turbulentes étaient trop peu efficaces pour pouvoir contribuer à la dynamique du champ magnétique à grande échelle dans une expérience de laboratoire pour laquelle R_m est de l'ordre de l'unité.

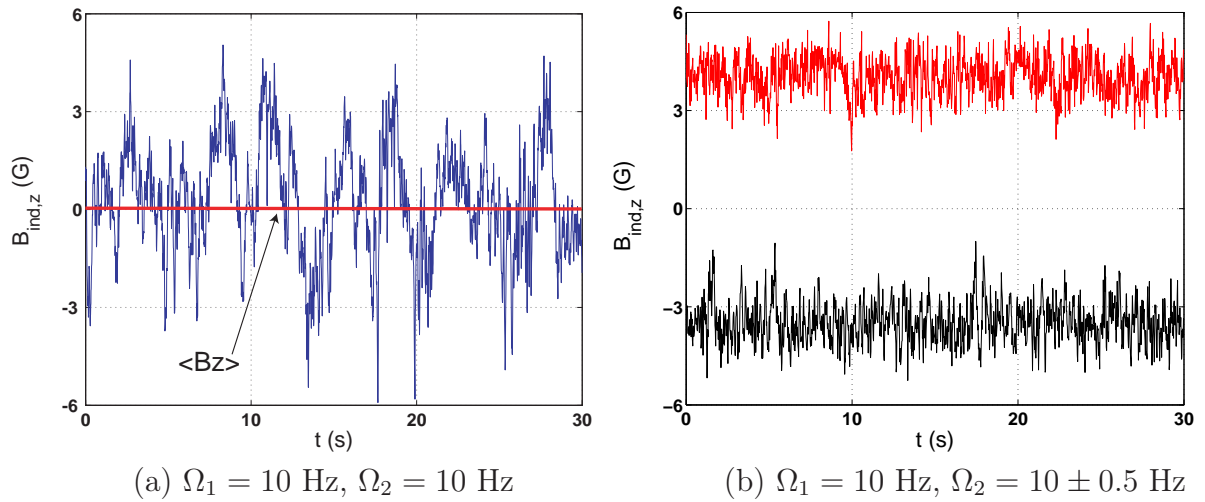


Fig. VI.1: Champ transverse imposé $B_0 = 45 \text{ G}$, champ axial B_z mesuré au point 1 sur Ox . Figure (a) : évolution temporelle de B_z dans le cas d'une contrarotation symétrique (cf figure IV.7 (c)). Figure (b) : cas d'une contrarotation asymétrique $|\Delta\Omega| = 0.5 \text{ Hz}$. L'écoulement a bifurqué et montre un comportement similaire à l'écoulement s_1t_1 . Les valeurs moyennes sont à comparer aux figures IV.7 (b) et (f) obtenues lorsqu'un seul disque est en rotation.

Toutefois, nous savons, par les études menées dans les expériences utilisant de l'eau [60]

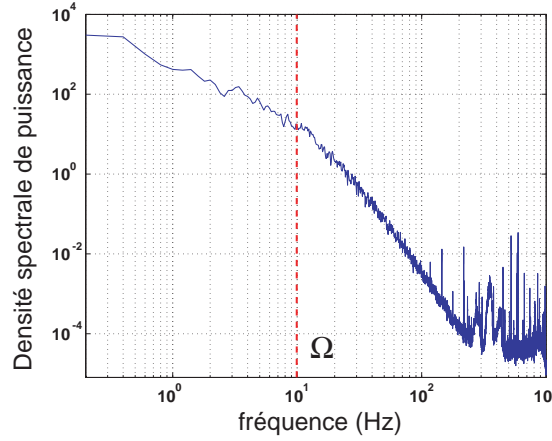
que la turbulence à petite échelle n'est pas la seule source d'instationnarité du champ de vitesse de l'écoulement de von Kármán contrarotatif. En effet celui-ci présente une dynamique à grande échelle sur des temps caractéristiques au moins aussi grands que le temps de retournement $\tau_r = 1/\Omega$, ce qui influence la dynamique du champ magnétique induit. Pour mettre en évidence cette influence, nous avons représenté sur la figure VI.1 (a) l'évolution temporelle du champ magnétique induit $B_z(t)$, mesuré dans VKG au point 1 sur l'axe Ox ($r = R/2$, $\theta = 0$, $z = 0$), dans le cas d'un champ transverse appliqué et d'un écoulement en contrarotation symétrique. Nous observons que la composante axiale instantanée, dont nous savons qu'elle doit être nulle en moyenne (chapitre IV, figure IV.7 (c)), présente de larges déviations par rapport à la moyenne. Le champ induit manifeste un comportement bistable et semble passer d'un état "haut" ($B_{\text{haut}} = +3$ G) à un état "bas" ($B_{\text{bas}} = -3$ G) avec un temps caractéristique très supérieur au temps de rotation des disques. Pour saisir l'origine de cette bistabilité, nous avons porté en figure VI.1 (b) le champ induit $B_z(t)$ mesuré dans les cas d'une contrarotation légèrement dissymétrique pour laquelle l'un des deux disques tourne légèrement plus rapidement que l'autre ($\Omega' = \Omega \pm 0.5$ Hz).

Ceci définit alors deux écoulements pour lesquels la couche de mélange s'est déplacée vers le disque le moins rapide [60, 86]. La vitesse au centre du cylindre V_z n'est dès lors plus nulle et le signe de la valeur moyenne du champ axial induit s'interprète selon le schéma représenté en figure IV.6. On observe d'ailleurs que la valeur moyenne est comparable à celle obtenue dans le cas d'un écoulement à un disque (figures IV.7 (a),(e)), dont le signe ne dépend que du sens du pompage au centre de la cuve. Nous constatons que ces deux états "bifurqués" sont caractérisés par de plus faibles fluctuations, et que leurs valeurs moyennes encadrent l'amplitude de l'oscillation du signal obtenu pour une contrarotation exacte. Puisque le champ magnétique induit mesuré dans VKG est une image des gradients de vitesse, cette observation qualitative tend à montrer que le champ de vitesse instantané $s_2 t_2$ semble hésiter entre les deux états "bifurqués". Une dynamique similaire, qu'il faut rattacher à l'instabilité de la couche de mélange, a d'ailleurs été observée dans l'expérience VKE au CEA de Saclay [60].

De cette courte étude de la dynamique du champ magnétique nous pouvons tirer plusieurs informations :

- le champ magnétique possède une dynamique aux fréquences intermédiaires et aux basses fréquences dont l'amplitude des fluctuations est du même ordre de grandeur que le champ induit par l'écoulement moyen.
- Cette dynamique à grande échelle n'est pas un artefact dû à une dissymétrie du montage expérimental puisqu'elle disparaît dans le cas d'une légère dissymétrie. Elle est une caractéristique de la dynamique à grande échelle de l'écoulement de von Kármán $s_2 t_2$.

Ces deux résultats suggèrent que dans les dispositifs VKG et VKS, l'écoulement de von Kármán instantané n'est pas égal à la somme de l'écoulement stationnaire et d'une contribution haute fréquence de la turbulence. C'est ce que confirme la figure VI.2 qui montre la densité spectrale de puissance correspondant à l'évolution temporelle du champ axial de la figure VI.1 (a). L'écoulement possède de l'énergie sur une large plage de fréquences, et peut se trouver dans des configurations instantanées qui brisent les symétries de l'écoulement moyen.



$$\Omega_1 = 10 \text{ Hz}, \Omega_2 = 10 \text{ Hz}$$

Fig. VI.2: Champ transverse imposé $B_0 = 45 \text{ G}$. Densité spectrale de puissance de la composante axiale représentée en figure VI.1 (a).

Pour comprendre l'impact de ces fluctuations à grande échelle sur les mécanismes générateurs d'effet dynamo, il nous faut donc étudier la dynamique du champ magnétique induit. Le problème est alors plus complexe que précédemment puisque l'équation

$$\lambda \Delta \langle \mathbf{B}_{ind} \rangle + \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B}_{ind} \rangle) = -\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \langle \mathbf{V} \rangle, \quad (\text{VI.1})$$

qui liait la structure du champ induit stationnaire aux gradients de l'écoulement moyen n'est plus valable. Elle doit en effet être modifiée pour prendre en compte les variations temporelles du champ induit. On obtient alors :

$$\partial_t \mathbf{B}_{ind} - \lambda \Delta \mathbf{B}_{ind} - \nabla \times (\mathbf{V}(t) \times \mathbf{B}_{ind}) = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}(t) \quad (\text{VI.2})$$

Toutefois, les temps caractéristiques sur lesquels se manifestent ces fluctuations à grande échelle sont supérieurs à 100 ms, ce qui est plus grand que temps de diffusion $\tau_{diff} = 50 \text{ ms}$ du dispositif VKG. Nous négligeons donc $\partial_t \mathbf{B}$ devant $\lambda \Delta \mathbf{B}$, et supposons que l'équation VI.1 est valable en régime dynamique. Ceci nous permettra d'utiliser les raisonnements géométriques grâce auxquels nous avons interprété les mesures de l'induction dans le régime stationnaire.

C'est en suivant cette démarche que nous avons tenté de relier la dynamique temporelle du champ magnétique à grande échelle à l'évolution temporelle de l'écoulement. Cherchant à décrire un processus global à l'échelle de l'expérience, nous avons développé au laboratoire la matrice de capteurs décrite au paragraphe III.2.2, qui permet de mesurer le champ induit en plusieurs points (et au même instant) dans l'expérience VKG. Nous abordons dans ce chapitre les fluctuations des profils ainsi obtenus dans le régime des R_m de l'ordre de 1.

VI.2 Mesure des profils d'induction

Pour l'étude des profils d'induction aux faibles R_m , nous reprenons le dispositif expérimental VKG décrit au chapitre IV. L'écoulement étudié est imposé par une contrarotation

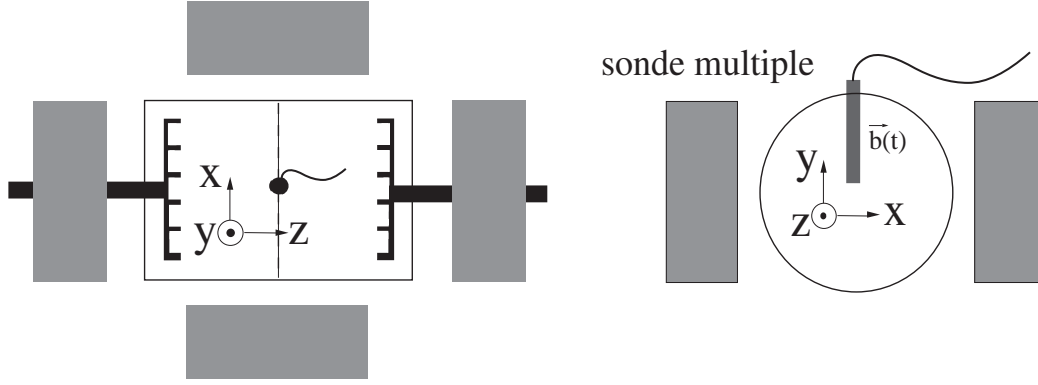


Fig. VI.3: Dispositif expérimental utilisé pour l'étude des profils d'induction dans l'expérience VKG : la sonde multiple est placée dans le plan médian parallèlement à l'axe Oy et permet de mesurer la composante axiale $B_z(r, t)$, ou transverse $B_x(r, t)$ en huit points $(r_i)_{i=[1,8]}$ situés le long d'un rayon. Le champ magnétique est uniforme et appliqué le long de la direction Ox (champ transverse), ou Oz (champ axial).

symétrique des deux disques à pales droites.

Dans le cas d'un champ imposé axial ou transverse, nous avons enregistré simultanément une seule composante du champ magnétique ($B_{x,ind}(t)$, ou $B_{z,ind}(t)$) en huit points r_i répartis le long de l'axe Oy . Mesurant ainsi une composante du champ magnétique induit tout les centimètres entre les rayons $r_1 = 1.5$ cm et le rayon $r_8 = 8.5$ cm, nous avons obtenu des profils instantanés du champ magnétique induit. Puisqu'on a toujours $R_m \leq 5$ dans le dispositif VKG, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur à 1 dans l'équation d'induction pour obtenir l'équation d'évolution, quasistatique et linéaire, dont est solution le champ induit :

$$\lambda \Delta \mathbf{B}_{ind}(t) = -\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{V}(t) \quad (\text{VI.3})$$

Celle-ci montre que les fluctuations des profils du champ magnétique seront donc une image des fluctuations des gradients de vitesse sondés dans la direction, axiale ou transverse, du champ appliqué. Pour chacune de ces deux directions de champ imposé, nous avons alors enregistré la composante B_z ou B_x , ce qui définit quatre configurations différentes pour sonder l'écoulement :

A • effet d'étirement : champ axial imposé $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, champ axial mesuré $\mathbf{B}_{ind} = B_z(r_i, t) \mathbf{e}_z$. Dans cette configuration, le terme source de l'équation de Poisson s'écrit : $B_0 \partial_z V_z(t)$. Il s'agit donc de l'effet d'étirement du champ imposé par le point de stagnation, qui produit un champ induit parallèle au champ imposé, et de même sens.

B • Effet Ω : champ axial imposé $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, champ transverse mesuré $\mathbf{B}_{ind} = B_x(r_i, t) \mathbf{e}_x$. Dans cette configuration, le terme source est : $B_0 \partial_z V_x(t)$. Comme nous faisons la mesure sur des points appartenant à l'axe Oy , le vecteur \mathbf{e}_x se confond en cet endroit avec \mathbf{e}_θ . Les effets d'induction moyens sont dus à la rotation différentielle $B_0 \partial_z V_\theta$, et les profils instantanés seront donc le

reflet des fluctuations de la rotation différentielle.

C • Effet de compression : champ transverse imposé $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$, champ transverse mesuré $\mathbf{B}_{ind} = B_x(r_i, t) \mathbf{e}_x$. Ici le terme source de l'équation de Poisson s'écrit : $B_0 \partial_x V_x(t)$. C'est l'effet de compression du champ imposé par le point de stagnation qui produit, comme dans le cas de l'étirement, un champ induit parallèle au champ imposé, mais de sens opposé. Ce mécanisme d'induction fait donc lui aussi apparaître la dynamique du point de stagnation. Dans cette configuration, le champ appliqué brise l'invariance par rotation, et l'effet d'induction de l'écoulement moyen est maximal aux points de mesure le long de Oy .

D • Effet C.L. : champ transverse imposé $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$, champ axial mesuré $\mathbf{B}_{ind} = B_z(r_i, t) \mathbf{e}_z$. Dans cette configuration, bien que le terme source de l'équation de Poisson soit nul en moyenne, nous avons vu qu'il existe un effet d'induction lié à la présence de rotation différentielle et à la différence de conductivité en $r = R$. Cet effet, nommé effet C.L. (cf §IV.1.3.2), est lui aussi maximal le long de Oy .

Nous avons donc à notre disposition deux configurations expérimentales permettant d'étudier les fluctuations des profils dans le cas d'un mécanisme d'induction dû au seul point de stagnation, et deux autres configurations pour lesquelles le champ induit provient de la rotation différentielle.

VI.3 Étude statistique en un point

Avant de considérer la dynamique des profils d'induction, nous analysons tout d'abord les fluctuations du champ magnétique induit mesuré comme une variable locale, et considérons les mesures en chaque point comme indépendantes. Afin de pouvoir analyser l'influence d'un changement de direction du champ appliqué sur la dynamique du champ induit, nous ne considérons que les mesures de la composante transverse du champ magnétique induit $B_x(t)$ dans les cas d'un champ magnétique axial (cas B, effet Ω) dans un premier temps, puis dans le cas d'un champ appliqué transverse (cas C, effet de compression). En effet pour ces deux mesures, la position de la sonde est la même, et la seule différence provient de la direction du champ appliqué. Nous considérons alors deux situations distinctes : soit nous fixons la vitesse à la valeur $\Omega = 10$ Hz ($R_m = 2$) et étudions les propriétés du champ induit en fonction de la position de la sonde, soit nous fixons la position de la sonde $r = 7.5$ cm et étudions les propriétés de l'induction en fonction de Ω .

• **Configuration B, effet Ω ($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, $\mathbf{B}_{ind} = B_x \mathbf{e}_x$) :** la figure VI.4 montre les résultats obtenus dans le cas d'un champ axial appliqué $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, et d'un champ transverse B_x mesuré. Pour la lisibilité, la figure est divisée en deux parties. Sur la partie gauche, les figures VI.4 (a), (b), (c) montrent les résultats obtenus en différents points pour une même vitesse $\Omega = 10$ Hz, alors que les figures VI.4 (e), (f), (g) situées à droite montrent les résultats obtenus pour une mesure au même point pour quatre valeurs différentes de

R_m . Les figures VI.4 (a), (d) représentent les fonctions d'auto-corrélation normalisées tracées en fonction de la variable adimensionnée $\Omega\tau$, les figures VI.4 (b), (e) les densités de probabilité centrées et réduites des fluctuations du champ induit, et enfin les figures VI.4 (c), (f) les densités spectrales de puissance du champ induit en fonction de la fréquence adimensionnée f/Ω .

Densités de probabilité : nous observons sur les figures VI.4 (b), (e) que les densités de probabilité des fluctuations du champ magnétique se superposent parfaitement une fois réduites, et sont quasi-gaussiennes quel que soit l'endroit où l'on fait la mesure, et quelle que soit la vitesse de rotation.

Densités spectrales d'énergie : les figures VI.4 (c), (f), qui représentent le spectre de puissance des fluctuations du champ magnétique, montrent que ceux-ci sont très semblables quel que soit l'endroit de mesure, ou la vitesse de rotation. Les fluctuations contiennent de l'énergie sur une vaste gamme d'échelles temporelles s'étendant des très basses fréquences $f \sim \Omega/100$, aux grandes fréquences $f \sim 10 \Omega$.

Pour $f > \Omega$, nous trouvons que le spectre possède une structure autosimilaire du type $f^{-\alpha}$, mais avec exposant proche de -4.6 , plus grand en valeur absolue que la valeur $-11/3$ prévue par la phénoménologie de Kolmogorov [11, 64, 16].

Pour $f < \Omega/5$, nous trouvons conformément aux résultats de l'expérience VKS1 [16] que le champ magnétique possède de l'énergie aux basses fréquences et qu'il peut être décrit par une loi de puissance f^β . Si nous trouvons dans le cas présent que l'exposant ne varie pas lorsqu'on fait varier la vitesse de rotation ou encore la position du capteur, nous ne trouvons pas un comportement en $1/f$ avec un exposant $\beta = -1$, mais un exposant proche de $\beta = -0.5$.

Fonctions d'autocorrélations : enfin, les figures VI.4 (a), (d) montrent que le champ magnétique est corrélé sur un temps typique τ_c égal au temps de rotation des disques $1/\Omega$. Ceci signifie qu'au bout d'un tour, ce qui correspond aussi environ à un temps de diffusion, le champ magnétique a presque perdu la mémoire de ses valeurs antérieures. Il reste cependant une décroissance lente des corrélations, qui se manifeste aux grands temps, et qui correspond à la présence d'énergie aux basses fréquences dans le spectre de puissance du champ induit.

Conclusion : nous avons montré que dans cette configuration de champ axial appliqué et de champ transverse mesuré, il n'est pas possible a priori de distinguer deux mesures faites pour deux vitesses de rotation différentes, ou encore deux mesures faites en deux endroits distincts. Ce résultat, qui a été exposé dans le cas de l'effet Ω lié à la rotation différentielle, vaut aussi lorsqu'on mesure la composante B_z produite par étirement du champ axial par le pompage. Nous retrouvons la même pente à basse fréquence, ainsi que des pdf quasi-gaussiennes, ce qui semble être une caractéristique de la configuration de champ axial appliqué.

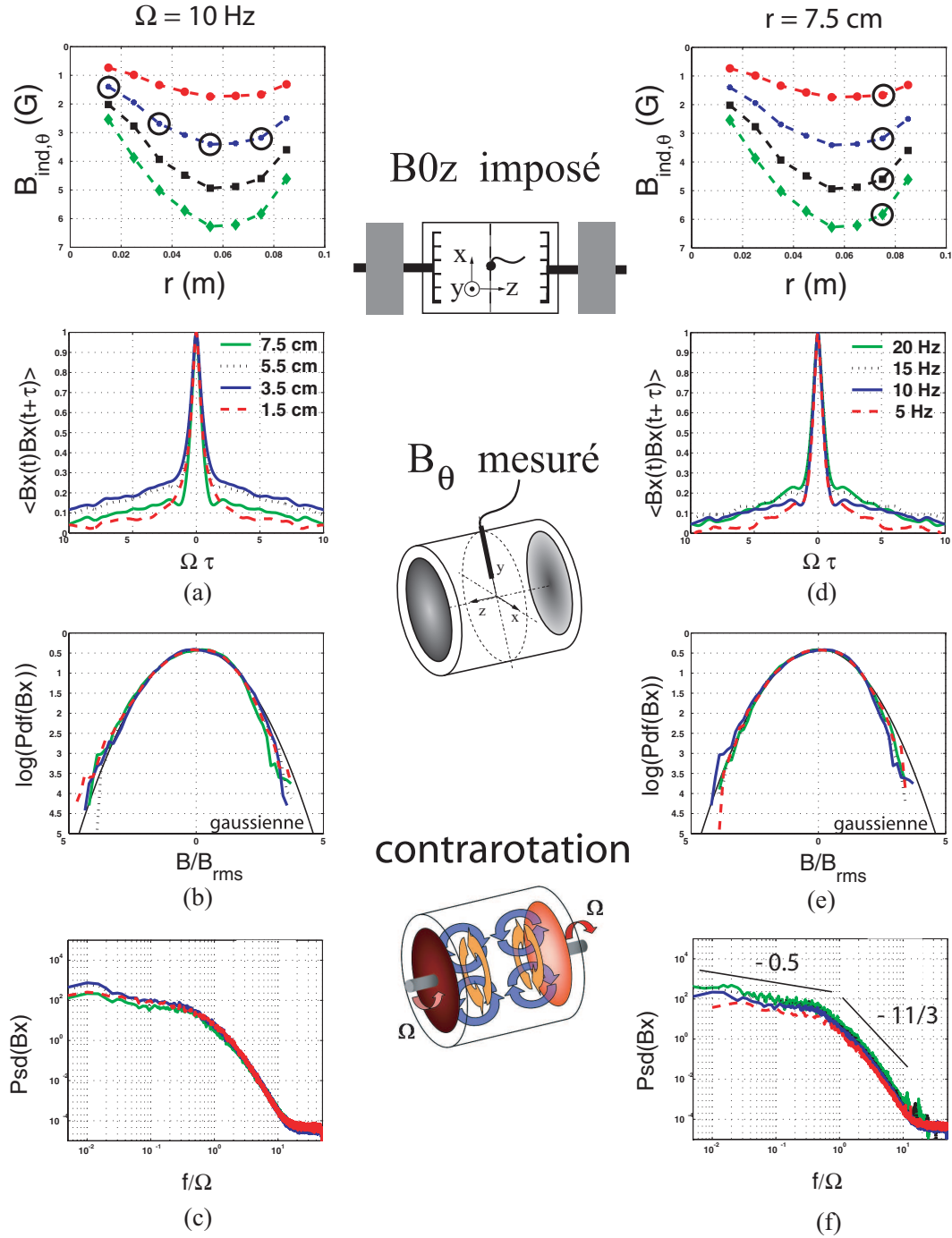


Fig. VI.4: Effet Ω , champ axial imposé $B_0 e_z$, champ transverse B_x mesuré le long de Oy : figures (a), (b) et (c) : fonctions d'auto-corrélation, Pdf centrées et réduites, et spectres de puissance de la composante B_x mesurées en $r = 1.5, 3.5, 5.5$ et 7.5 cm pour une vitesse de rotation fixe $\Omega = 10$ Hz ($R_m = 2$). Figures (d), (e) et (f) : fonctions d'auto-corrélation, Pdf centrées et réduites, et spectres de puissance de la composante B_x mesurées en $r = 7.5$ cm pour quatre vitesses $\Omega = 5, 10, 15$ et 20 Hz ($R_m = 1, 2, 3$ et 4). Sur les figure (b) et (e), nous avons tracé une courbe gaussienne (ligne pleine) comme "guide l'œil". Les deux figures du haut représentent l'évolution des profils radiaux de la composante $\langle B_x \rangle$ pour les quatre valeurs de R_m utilisées pour décrire les fluctuations du champ induit (cf figure IV.2). Les cercles indiquent l'endroit, et la vitesse, correspondant aux mesures.

• **Configuration C, effet de compression** ($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$, $\mathbf{B}_{ind} = B_x \mathbf{e}_x$) : la figure VI.5 montre les résultats obtenus pour l'induction de la composante B_x induite le long de Oy par compression du champ transverse appliqué $B_{0,x}$. Pour la lisibilité, elle est organisée de la même manière que la figure VI.4, et oppose donc les courbes obtenues dans le cas d'une vitesse $\Omega = 10$ Hz à gauche (figures (a), (b) et (c)), à celles obtenues au point $r = 7.5$ cm disposées sur la droite (figures (d), (e) et (f)).

Densités de probabilité : contrairement au cas précédent, la figure VI.5 (b) montre que les densités de probabilité centrées et réduites ne se superposent plus. Leur forme change en fonction de l'endroit où est faite la mesure, les propriétés du champ magnétique induit ne semblent donc plus homogènes le long d'un rayon. Les pdf sont quasi-gaussiennes dans la région centrale du plan médian alors qu'elles affectent plutôt une forme bimodale lorsqu'on s'écarte du centre. Ce résultat ne semble toutefois pas affecté par un changement de la vitesse de rotation des disques puisque les pdf obtenues en un même point, mais pour différentes vitesses, se superposent une fois réduites.

Densités spectrales d'énergie : les spectres de puissance représentés en figure VI.5 (c), (f) possèdent qualitativement une allure semblable à ceux observés dans le cas d'un champ axial appliqué. Pour $f > \Omega$, nous retrouvons une pente proche de -4.6 , ce qui prouve que les fluctuations hautes fréquences sont indépendantes de la direction du champ appliqué. Une différence surprenante apparaît en revanche lorsqu'on s'intéresse aux basses fréquences du spectre ($f \leq \Omega/5$). Dans ce régime, les fluctuations du champ magnétique sont beaucoup plus énergétiques, et le spectre montre un comportement en loi de puissance d'exposant proche de -1.2 . Il est donc supérieur en valeur absolue à celui observé non seulement dans le cas du champ axial à bas R_m , mais aussi à celui observé dans l'expérience VKS1 [16].

Fonctions d'auto-corrélations : la présence d'énergie aux basses fréquences se retrouve de manière spectaculaire lorsqu'on étudie les fonctions d'auto-corrélation du champ induit. Alors que dans le cas du champ axial, le temps de corrélation $\tau_c = 1/\Omega$ ne dépendait pas de la position de la mesure, nous observons sur la figure VI.5 (a) qu'au centre et sur le bord, le signal est corrélé sur un temps au moins dix fois supérieur au temps de rotation. Le système semble donc posséder un second temps de corrélation beaucoup plus important que le premier, mais qui ne varie pas de manière simple en fonction de la position, ni d'ailleurs de la vitesse de rotation (figure VI.5 (d)).

Remarque : dans un souci de concision, nous avons choisi de ne pas montrer les résultats obtenus pour la composante axiale B_z obtenue par effet des conditions aux limites (effet de la rotation différentielle). En effet, nous avons observé des résultats similaires à ceux obtenus pour B_x avec un exposant -1.2 pour les spectres à basse fréquence, et des pdf qui deviennent bimodales lorsqu'on s'écarte de l'axe de rotation.

Amplitude des fluctuations : nous savons, par les études concernant l'induction moyenne que l'amplitude du champ magnétique induit dans le cas de l'écoulement contrarotatif évolue linéairement avec R_m . Il a par ailleurs été montré qu'il en va de même pour la valeur rms de ses fluctuations [73, 16]. Puisque cette dernière quantité est proportionnelles au champ appliqué, les rapports $(B_x)_{rms}/B_{0,x}$ et $(B_z)_{rms}/B_{0,z}$ ne dépendent pas de l'ampli-

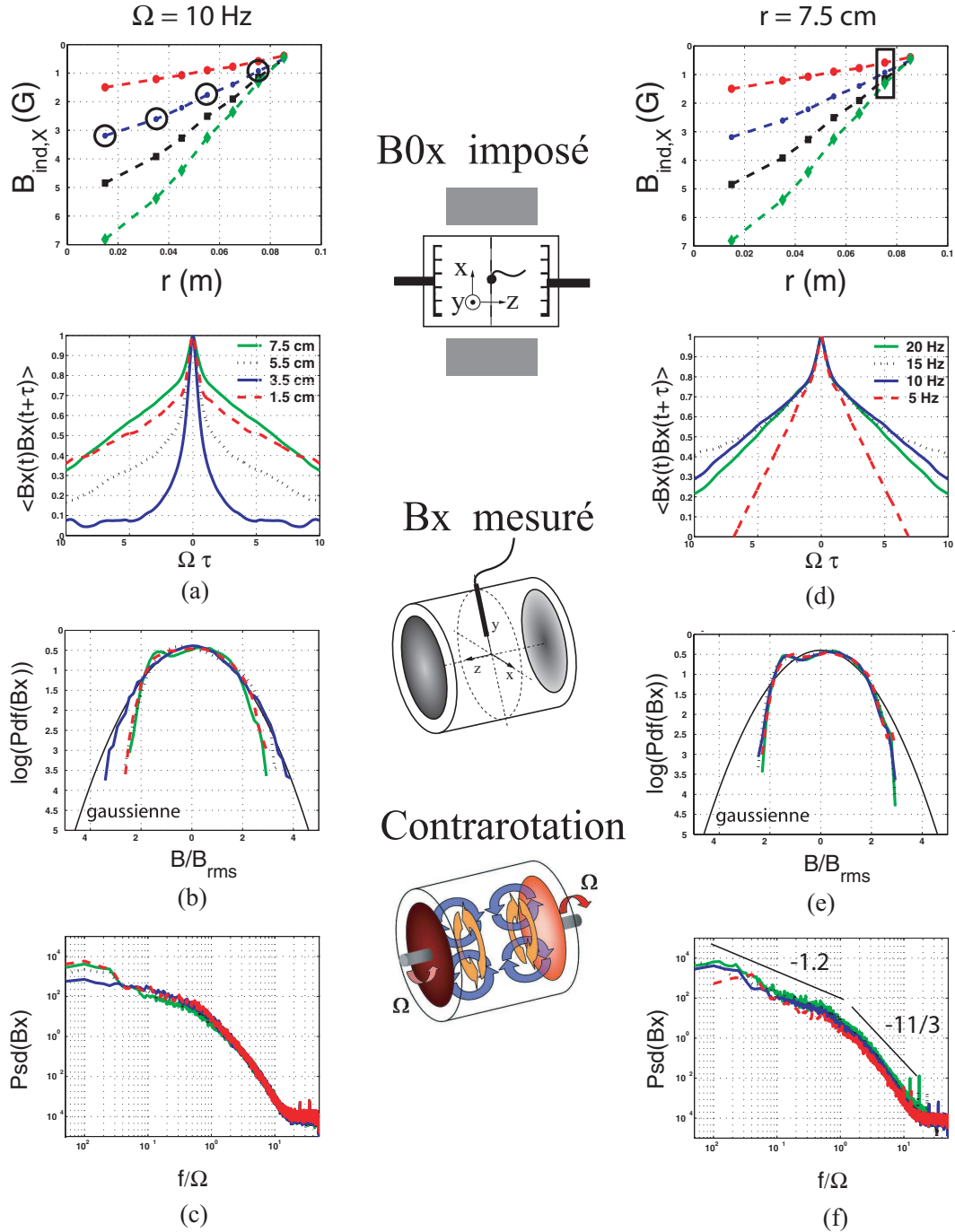


Fig. VI.5: Effet de compression, champ transverse imposé $B_0 e_x$, champ transverse B_x mesuré le long de Oy : figures (a), (b) et (c) : fonctions d'auto-corrélation, Pdf centrées et réduites, et spectres de puissance de la composante B_x mesurées en $r = 1.5, 3.5, 5.5$ et 7.5 cm pour une vitesse de rotation fixe $\Omega = 10$ Hz ($R_m = 2$). Figures (d), (e) et (f) : fonctions d'auto-corrélation, Pdf centrées et réduites, et spectres de puissance de la composante B_x mesurées en $r = 7.5$ cm pour quatre vitesses $\Omega = 5, 10, 15$ et 20 Hz ($R_m = 1, 2, 3$ et 4). Sur les figure (b) et (e), nous avons tracé une courbe gaussienne (ligne pleine) comme “guide l’œil”. Les figures du haut de page représentent l'évolution des profils radiaux de la composante $\langle B_x \rangle$ (cf figure IV.10) du champ induit pour les quatre valeurs de R_m utilisées pour décrire les propriétés du champ induit. Les cercle et rectangle indiquent l'endroit, et la vitesse, correspondant à la mesure.

tude du champ appliqué, sont linéaires en Ω , et sont donc caractéristiques des fluctuations des mécanismes d'induction. Le tableau VI.1 regroupe les valeurs typiques obtenues pour chacune des configurations lorsqu'on évalue le rapport au point où l'effet d'induction moyen est maximal :

Mécanisme	Origine	localisation	B_0	rapport	valeur
Effet Ω	rotation	$r = R/2$	25 G	$(B_x)_{\text{rms}}/B_{0,z}$	3.5%
Étirement	pompage	$r = 0$	25 G	$(B_z)_{\text{rms}}/B_{0,z}$	1.9%
Effet C.L.	rotation	$r = R/2$	45 G	$(B_z)_{\text{rms}}/B_{0,x}$	3.4%
Compression	pompage	$r = 0$	45 G	$(B_x)_{\text{rms}}/B_{0,x}$	4.0%

Tab. VI.1: Valeurs des rapports B_{rms}/B_0 pour chacune des configurations. La vitesse de rotation est $\Omega = 10$ Hz ($R_m = 2$), et la valeur rms est mesurée à la position où l'effet est maximal, en $r = 0$ pour les effets du pompage, et en $r = R/2$ pour les effets de la rotation.

Les deux premières lignes montrent que dans le cas d'un champ axial appliqué, l'effet du pompage donne un rapport B_{rms}/B_0 moins grand que celui de l'effet de la rotation différentielle. Ce résultat, qui suggère que la composante de rotation fluctue plus que la composante de recirculation, peut se comprendre lorsqu'on considère de manière précise le mode d'entraînement du fluide. En effet, puisque c'est l'éjection centrifuge du fluide par les pales au niveau des disques qui impose l'écoulement de recirculation, la vitesse v_z de part et d'autre du plan médian doit donner un flux de matière stable dans le temps. Du fait de cette contrainte géométrique, on s'attend donc à ce que l'écoulement "poloïdal" fluctue moins que l'écoulement "toroïdal", qui est dû au cisaillement de contrarotation des disques et n'est pas associé à une quelconque contrainte géométrique. Toutefois, dans le cas d'un champ transverse appliqué (deux dernières lignes), on ne retrouve pas ce résultat puisque les effets du pompage et de la rotation montrent des fluctuations de même amplitude.

Conclusion des mesures locales du champ induit : nous avons observé que pour une même direction de mesure, la nature des fluctuations du champ magnétique ne dépend que de la direction dans laquelle on applique le champ extérieur. En champ axial, celles-ci ne dépendent ni de la vitesse de rotation, ni du point de mesure. Le champ est presque décorrélé au bout d'un temps de rotation, ses fluctuations sont gaussiennes, et peu d'énergie est présente aux basses fréquences. En revanche lorsqu'on applique un champ transverse, le champ magnétique induit change radicalement de comportement. Les fluctuations montrent un comportement bistable au centre de la cuve et au niveau de la paroi, sont corrélées sur une dizaine de temps de rotation, et contiennent beaucoup d'énergie aux basses fréquences.

Toutefois, comme le souligne la figure VI.6 (a) qui compare les spectres des composantes B_x mesurées en champ axial et en champ transverse, ces différences disparaissent dans le domaine des hautes fréquences. Les fluctuations redeviennent alors isotropes, et les deux configurations de champ appliqué donnent des résultats équivalents. Nous avons d'ailleurs pu constater expérimentalement que pour les fréquences plus grandes que Ω , les spectres ne dépendent plus ni de la position, ni de la fréquence de rotation.

Il semble donc que le champ induit permette dans une certaine mesure de caractériser

l'anisotropie à grande échelle des fluctuations des gradients de la vitesse.

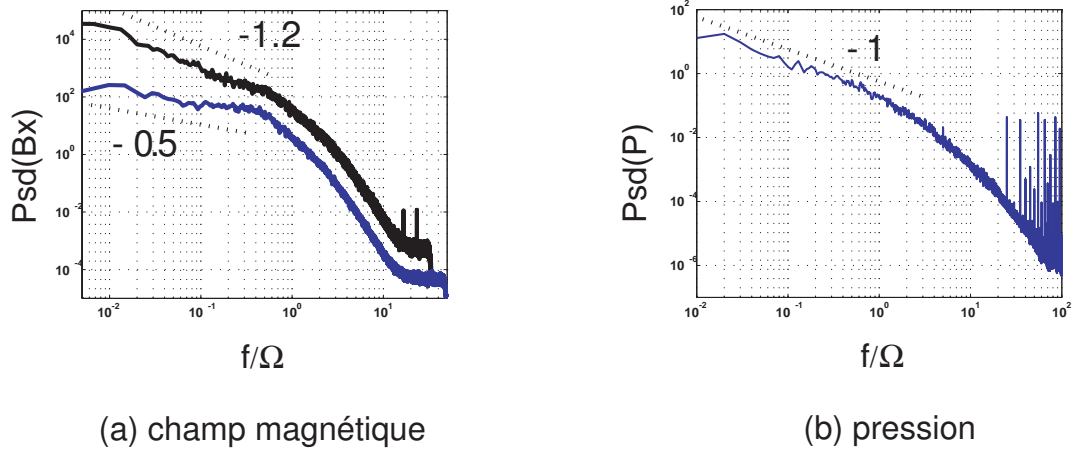


Fig. VI.6: Spectres de puissance obtenus avec les deux disques en contrarotation symétrique à $\Omega = 10$ Hz : figure (a) : champ magnétique B_x dans le cas d'un champ axial (au dessous), et d'un champ transverse (au dessus). Les courbes ont été décalées pour la lisibilité. Figure (b) : spectre de pression obtenu pour une fréquence d'acquisition $f_{ech} = 2$ kHz. La fréquence de coupure est celle du filtre anti-repliement du système d'acquisition.

Remarque : l'expérience VKS1 avait déjà permis de mettre en évidence le comportement en loi de puissance du spectre de puissance du champ induit dans le domaine des basses fréquences [16]. Toutefois l'exposant mesuré s'est toujours révélé être proche de -1 quelle que soit la direction du champ appliqué, et quelle que soit la forme des pales utilisées. Les écoulements utilisés étant analogues, les différences obtenues ne peuvent donc provenir que du régime MHD dans lequel sont faites les mesures. En effet, si à bas R_m le champ magnétique apparaît comme une image fidèle des gradients de vitesse, dès lors que R_m devient plus grand que 10, la relation entre \mathbf{B} et \mathbf{V} est non linéaire et le champ magnétique induit résulte, comme dans le cas de la pression, d'un mélange des gradients de vitesse dans toutes les directions. On pourra d'ailleurs observer sur la figure VI.6 (b), qui représente un spectre de pression mesuré en paroi pour une contrarotation à $\Omega = 10$ Hz, que celui-ci montre une pente en $1/f$ aux basses fréquences...

VI.4 Fluctuations des profils

VI.4.1 Notion de profil

Nous avons décrit au paragraphe précédent les mesures locales du champ induit comme des mesures indépendantes. Comme le montrent les figures VI.7 (a), (b) qui représentent l'évolution temporelle du profil radial B_x pour les deux configurations de l'effet Ω (figure (a)) et de l'effet de compression (figure (b)), cette description locale des mesures du champ induit ne nous a pas permis d'observer le comportement global du champ induit.

En effet, ces deux figures montrent que les valeurs instantanées de B_{ind} mesurées aux différents points ne fluctuent pas de manière indépendantes. Chaque profil évolue en bloc

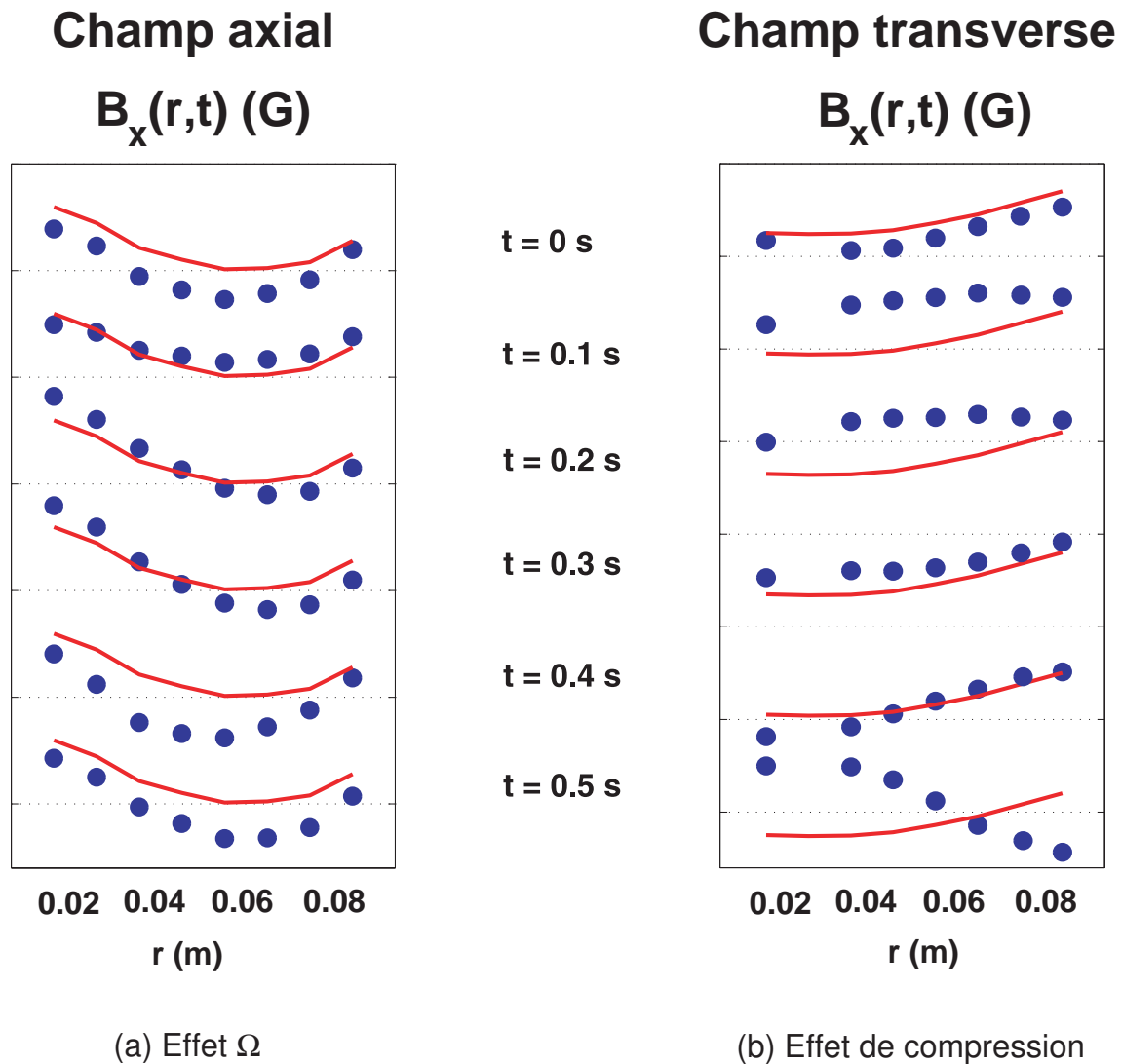


Fig. VI.7: Profil radial de la composante B_x induite le long de l'axe Oy pour six instants décalés de 0.5 s : figure (a) : champ axial, effet Ω . Figure (b) : champ transverse, effet de compression. Ligne pleine (-) : profil moyen. Ronds pleins (\bullet) : mesure instantanée. Pour plus de lisibilité, nous avons décalé vers le bas les profils obtenus pour des instants ultérieurs.

autour du profil moyen en gardant une structure relativement lisse à chaque instant. Ces figures permettent de plus de retrouver que les profils ont un comportement conditionné par la direction du champ appliqué. En effet, alors que le profil instantané obtenu en champ axial ne semble pas trop s'écarter du profil moyen, le profil mesuré en champ transverse montre des écarts à la moyenne beaucoup plus importants. De cette étude qualitative, il apparaît que le champ induit doit être considéré comme une quantité globale corrélée à l'échelle de l'expérience.

Pour quantifier ce résultat, nous avons représenté dans le cas de l'effet de compression :

- en figure VI.8 (a), les fonctions d'inter-corrélation, normalisées par le produit des déviations standards, entre B_{ind} en position 7 et B_{ind} aux positions 7, 5, 3, et 1 en fonction du retard temporel τ .
- En figure VI.8 (b), le maximum des fonctions d'inter-corrélation normalisées, entre B_{ind} en position 1 et B_{ind} aux autres positions en fonction de la distance entre les sondes. Nous avons superposé les courbes obtenues pour les quatre valeurs de la vitesse $\Omega = 5, 10, 15$, et 20 Hz.

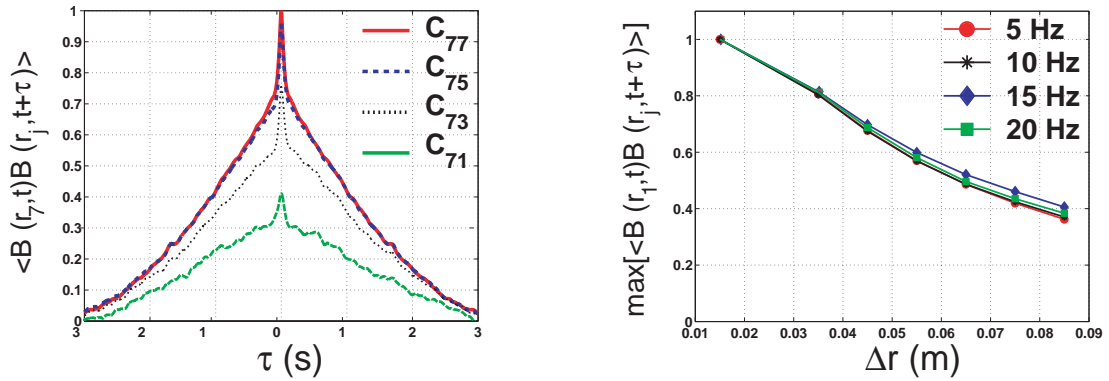


Fig. VI.8: Champ transverse imposé, champ transverse mesuré : inter-corrélations en fonction de la distance entre les sondes. Figure (a) : fonctions d'inter-corrélation normalisées C_{7j} tracées en fonction du décalage temporel τ mesuré en secondes. Ligne pleine et épaisse, $C_{77}(\tau)$. Ligne tiretée $C_{75}(\tau)$. Ligne pointillée $C_{73}(\tau)$. Ligne pleine fine $C_{71}(\tau)$. Figure (b) : maximum de la fonction d'inter-corrélation $\max(C_{1j})$ entre la sonde de position 1 et les autres sondes, tracé en fonction de la distance $\Delta r = r_1 - r_j$, pour quatre valeurs de R_m comprises entre 1 et 4.

Ces deux figures montrent que les fonctions d'inter-corrélation $C_{7j}(\tau)$ possèdent toutes un maximum centré sur la valeur nulle, et que ce maximum est supérieur à 0.3 quelle que soit la distance entre les sondes. La figure (a) montre, de plus, qu'il est très difficile de différencier deux mesures distantes de moins de 2 cm puisque les courbes C_{77} et C_{75} sont presque confondues. Ces résultats quantitatifs confirment donc l'analyse qualitative des profils. Le déphasage entre les différents points est nul, et lorsqu'il arrive un événement violent qui écarte notablement le profil de sa structure moyenne, cet événement est visible sur l'ensemble des capteurs. Ce résultat se comprend bien lorsque l'on considère le caractère diffusif du champ magnétique. En effet, si l'on prend comme échelle de temps, le temps de rotation $\tau_r = 1/\Omega = 0.1$ s, on trouve que la longueur de diffusion du dispositif

VKG est :

$$L_d = \sqrt{\frac{\lambda}{\Omega}} \sim 15 \text{ cm.} \quad (\text{VI.4})$$

Celle-ci étant plus grande que le rayon $R = 10 \text{ cm}$ du cylindre, on trouve qu'une perturbation de \mathbf{B} de temps caractéristique $\tau \geq \tau_r$ diffuse sur l'ensemble de l'expérience. Le champ magnétique induit est donc un objet corrélé à l'échelle de l'expérience qui doit être traité comme une quantité globale caractéristique des fluctuations temporelles des grandes échelles de l'écoulement.

Le problème qui se pose alors est celui de la prise en compte, et de la réduction, de la masse d'information contenue dans un profil instantané. En effet, puisque deux points très proches sont parfaitement corrélés, les profils d'induction contiennent une information redondante qu'il nous faut réduire pour tenter d'en capter l'essentiel.

Une première possibilité consiste à réduire l'information contenue dans les huit fonctions $B(r_i, t)$ en construisant une quantité représentative de l'écart du profil instantané $B(r_i, t)$ au profil moyen $\langle B(r_i, t) \rangle$. Notant N le nombre total de capteurs, nous avons défini cette quantité scalaire E comme :

$$E(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (B(r_i, t) - \langle B(r_i) \rangle)^2} \quad (\text{VI.5})$$

Elle s'interprète comme la distance calculée en norme \mathcal{L}^2 entre le profil instantané et le profil moyen. Les figures VI.9 (a), (b) représentent les densités de probabilité réduites (figure (a)), et les spectres (figures (b)) de l'écart $E(t)$ construit à partir de $B_x(r_i, t)$ dans les cas de l'effet Ω (ligne tiretée) et de l'effet de compression (ligne pleine). Dans les deux cas, la fréquence de rotation est la même, et est égale à 10 Hz ($R_m = 2$).

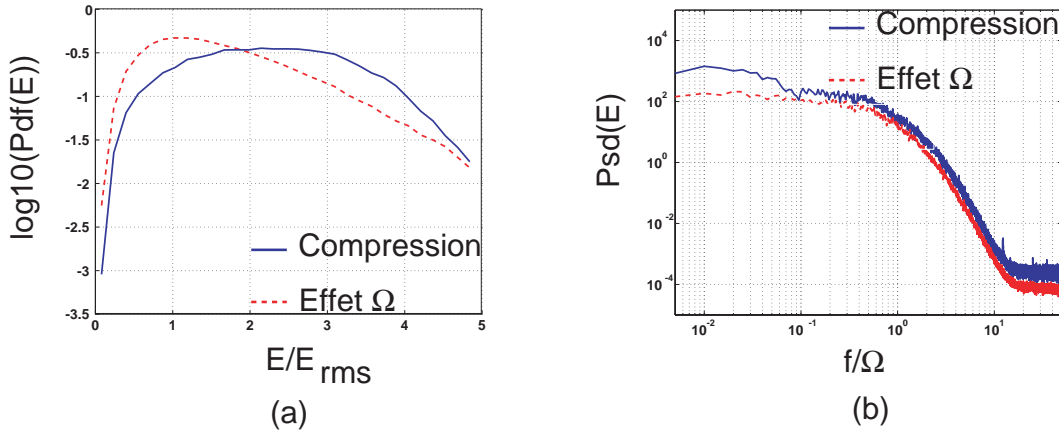


Fig. VI.9: Figure (a) : densité de probabilité réduites de l'écart au profil moyen $E(t)$. Figure (b) : spectres de puissance correspondants. Ligne pleine (-), effet de compression. Ligne tiretée (- -), effet Ω .

La figure (a) montre que l'écart moyen $\langle E \rangle$ est plus grand en champ transverse qu'en champ axial. De plus, la densité de probabilité est plus plate dans le premier cas que dans le second, ce qui indique que les grandes déviations par rapport au profil moyen sont beaucoup plus probables en champ transverse appliqué. Quelle que soit la configuration, et bien que E soit construit comme la somme de carrés de variables aléatoires (plus ou

moins) gaussiennes, aucune des pdf ne peut être représentée par une loi de type χ^2 , résultat que nous attribuons à la grande corrélation entre les mesures faites aux différents points. Nous retrouvons de même en figure (b) que le spectre de puissance du champ induit possède plus d'énergie à basse fréquence dans le cas d'un champ appliqué transverse. Ayant défini une norme permettant d'évaluer l'écart au profil moyen, nous comparons dans le tableau VI.2 les résultats obtenus concernant la moyenne et la déviation standard de $E(t)$ pour chacune des configurations.

Configuration	\mathbf{B}_0	B_{induit}	$\langle E \rangle$	E_{rms}
Effet Ω	axial	B_x	2	1.2
Étirement	axial	B_z	1.1	0.6
Effet $C.L.$	transverse	B_z	3.5	1.8
Compression	transverse	B_x	3.7	1.6

Tab. VI.2: Écart moyen, et valeur rms pour chacune des configurations, et pour une fréquence de rotation de 10 Hz. Chacune des valeurs mesurées est proportionnelle à la vitesse de rotation.

Celui-ci montre que pour une direction de mesure (B_x ou B_z) fixée, l'écart moyen ainsi que sa valeur rms sont toujours plus grands dans le cas d'un champ transverse que dans le cas d'un champ axial. Par ailleurs, conformément au résultat du tableau VI.1, nous retrouvons qu'en champ axial l'effet de la rotation différentielle donne un écart beaucoup plus important que dans le cas de l'étirement. Toutefois, en basant notre analyse sur l'écart au profil moyen plutôt que sur les mesures en un point, nous ne retrouvons pas non plus ce résultat en champ transverse appliqué.

Il semble à ce stade que l'utilisation de cette variable globale, qui somme des variables corrélées et fait perdre le lien géométrique entre le champ induit et les gradients, n'apporte pas beaucoup plus d'informations que les mesures locales. Pour palier ce défaut, nous allons donc revenir sur les profils du champ induit moyenné et à l'évolution de leurs caractéristiques avec R_m . Ceci nous permettra de définir des quantités basées sur la géométrie de l'écoulement, qui seront plus représentatives des fluctuations des mécanismes d'induction.

VI.4.2 Définition des profils par ajustement polynomial

Champ axial appliqué : nous avons représenté en figure VI.10 (a), (c) les profils moyens obtenus par effet Ω (figure (a)) et par effet d'étirement (figure (c)) en fonction de la position du capteur considéré (ronds pleins), dans le cas d'un champ axial appliqué et pour quatre valeurs de R_m comprises entre 1 et 4. Comme nous l'avons déjà constaté en section IV.1, lors de l'étude des effets d'induction moyens, les profils possèdent une structure spatiale lisse. Il est donc ainsi possible d'en obtenir une bonne approximation en réalisant un ajustement à l'aide d'un polynôme de degré 3 (lignes pointillées). Cet ajustement permet donc de remplacer la mesure du champ magnétique induit $B_{ind}(r_i, t)$

aux huit points, par quatre coefficients (a_i) correspondant aux paramètres du polynôme :

$$P(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \quad \text{avec } r \in [0, 0.1] \text{ m} \quad (\text{VI.6})$$

a_0 représente donc la valeur du champ induit extrapolée en $r = 0$, alors que a_1 représente la pente du profil à l'origine. Pour déterminer quels sont les coefficients nécessaires à la description de chacun des profils, nous avons représenté en figure VI.10 (b), (d) l'évolution des quatre coefficients obtenus dans chaque cas (effet Ω , et étirement) en fonction de R_m . Comme le rayon (en mètres) est toujours petit devant 1, il n'est pas possible de comparer directement les coefficients, nous avons donc tracé les quantités $a_k(R/2)^k$ en fonction de R_m .

• **Effet Ω** : la figure VI.10 (b) montre que dans le cas de l'effet Ω , le coefficient a_1 diminue linéairement avec R_m , et que son effet est dominant dans le polynôme. Nous constatons de plus que le coefficient a_0 reste inférieur à 0.5 G quelle que soit la vitesse de rotation des disques, ce qui représente en amplitude 2% du champ appliqué. Ces deux coefficients peuvent s'interpréter géométriquement à l'aide de la structure de l'écoulement. En effet, comme le champ induit par effet Ω est un champ orthoradial qui possède la symétrie de révolution, il doit s'annuler en $r = 0$. Dans le cas présent, nous observons un faible écart (0.5 G) à la valeur nulle, qui peut être attribué soit à un défaut d'orientation des sondes (qui ne sont pas parfaitement parallèles à Ox) soit à une perturbation systématique due à la présence du doigt de gant. Nous ne sommes donc pas capables de mesurer la symétrie de révolution à mieux que 0.5 G, aussi prendrons nous cette valeur comme limite de résolution du dispositif. Le coefficient a_1 , qui représente la pente à l'origine du profil radial et augmente linéairement avec R_m , s'interprète quant à lui comme une mesure du terme source $\partial_z V_\theta$ du champ orthoradial. Nous utiliserons donc a_1 comme une mesure de la rotation différentielle de l'écoulement. Puisque le champ toroïdal doit s'annuler en $r = 0$ et $r = R$ (il est axisymétrique), il est maximal au centre de la cuve. Pour décrire le profil, il faut donc ajouter les termes a_2 et a_3 , qui sont proportionnels à r^2 et r^3 , pour décrire cette caractéristique géométrique.

• **Effet d'étirement** : comme le montre la figure VI.10 (d), dans le cas de l'effet d'étirement, on trouve que les coefficients a_0 et a_2 sont dominants en valeur absolue. Ils évoluent linéairement avec R_m et contribuent au profil avec un poids équivalent. Nous trouvons donc que les termes d'ordre impair sont faibles devant les termes d'ordre pair, ce qui est associé à la combinaison de la propriété de symétrie de révolution du champ axial induit et du caractère solénoïdal du champ magnétique. Ce résultat paraît logique puisque les effets du pompage, qui sont dus à la structure du point de stagnation, doivent être maximum au centre et très faibles en bord de cuve. On trouve alors que le coefficient a_0 représente une mesure des effets d'induction de la recirculation poloïdale, et que le coefficient a_2 assure la décroissance de l'amplitude du champ induit lorsqu'on s'écarte de l'axe Oz .

Champ transverse appliqué : dans le cas d'un champ transverse appliqué, nous avons montré que l'effet des conditions aux limites est un effet de la rotation différentielle, et que l'effet de compression est un effet de la recirculation poloïdale. Si cette interprétation des coefficients est correcte, nous devons retrouver dans ce cas une évolution semblable des coefficients des polynômes en fonction de R_m .

Les figures VI.11 (a), et (b) d'une part, et VI.11 (c), et (d) d'autre part montrent que tel

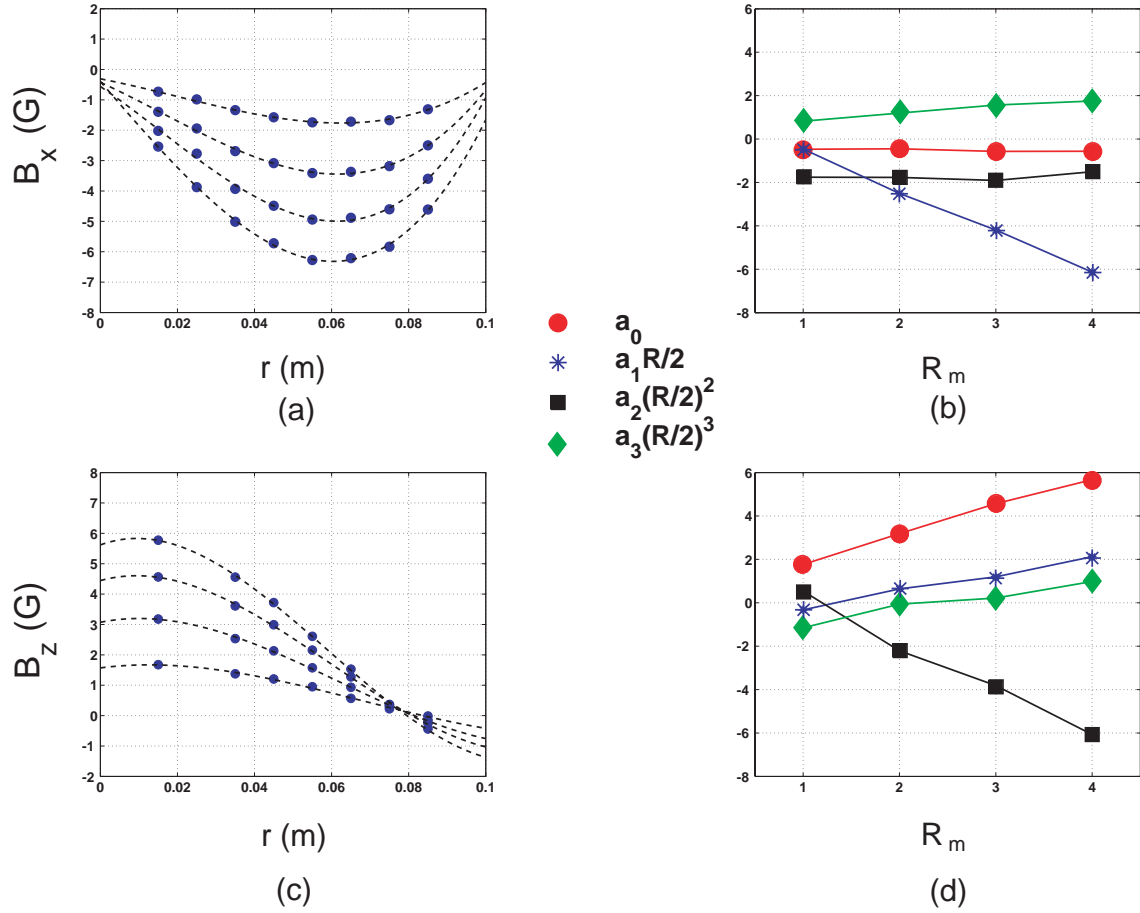


Fig. VI.10: Champ axial appliqué. Figure (a) : ronds pleins (\bullet), moyenne temporelle des profils radiaux de la composante B_x (effet Ω) mesurés pour $R_m = 1, 2, 3$ et 4. Lignes tiretées (- -), ajustements polynomiaux correspondants. Figure (b) : effet Ω , évolution des coefficients $a_k(R/2)^k$ (en gauss) en fonction de R_m . (\bullet) a_0 , ($*$) $a_1 R/2$, (\blacksquare) $a_2 (R/2)^2$, (\blacklozenge) $a_3 (R/2)^3$. Figure (c) : ronds pleins (\bullet), moyenne temporelle des profils radiaux de la composante B_z (effet d'étirement) mesurés pour $R_m = 1, 2, 3$ et 4. Lignes tiretées (- -), ajustements polynomiaux correspondants. Figure (d) : effet d'étirement, évolution des coefficients $a_k(R/2)^k$ (en gauss) en fonction de R_m . (\bullet) a_0 , ($*$) $a_1 R/2$, (\blacksquare) $a_2 (R/2)^2$, (\blacklozenge) $a_3 (R/2)^3$.

est bien le cas. Nous trouvons que l'effet *C.L.* donne un coefficient a_0 constant et voisin de zéro, alors que a_1 diminue linéairement avec R_m . De même, nous retrouvons dans le cas de l'effet de compression que c'est le coefficient a_0 qui quantifie l'effet du pompage.

Conclusion : de ces quatre résultats, nous pouvons tirer une généralité sur l'évolution des coefficients des polynômes : dans le cas d'un effet de la rotation différentielle, le coefficient a_1 permet de quantifier l'efficacité du mécanisme d'induction alors que le coefficient a_0 est une mesure de l'écart à la symétrie de révolution de l'écoulement. Plus le module de a_0 est grand, plus la perte de symétrie est importante. Dans le cas d'un effet de la recirculation poloïdale, c'est le coefficient a_0 qui est pertinent pour quantifier l'efficacité du mécanisme d'induction.

VI.4.3 Fluctuations de a_0 et a_1

Ajustement polynomial des profils instantanés : nous avons pu observer sur les figures VI.7 (a) et (b), que les profils instantanés possèdent une dépendance radiale presque aussi régulière que celle des profils moyens. On peut donc étendre l'analyse polynomiale au cas des profils instantanés, pour obtenir des coefficients qui sont alors des fonctions du temps. À l'aide de leur interprétation géométrique, nous allons donc décrire les fluctuations globales du champ induit au travers des fluctuations de $a_0(t)$ et $a_1(t)$ pour les effets de la rotation différentielle d'une part, et à l'aide des fluctuations de $a_0(t)$ dans les cas des effets du pompage d'autre part.

Restriction du domaine de fréquences : la figure VI.12 montre le spectre de puissance du coefficient $a_0(t)$ obtenu pour une vitesse de rotation de 10 Hz, dans les configurations de l'effet de compression d'un champ transverse (ligne pleine) et dans la configuration de l'effet d'étirement d'un champ axial (ligne tiretée). On voit que le spectre de puissance contient de l'énergie à toutes les fréquences, y compris aux fréquences supérieures à 30 Hz pour lesquelles la longueur de diffusion L_d est inférieure à $R/2 = 5$ cm. Pour ces fréquences, les fluctuations apparaissent donc comme des grandeurs locales et la notion de profil, qui nous a conduit aux ajustements polynomiaux n'a plus de sens. Nous ne les considérerons donc pas dans la suite, et nous nous restreindrons aux grandeurs filtrées à l'aide d'un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c = 30$ Hz. Aux fréquences considérées, le champ magnétique induit suit donc les fluctuations du champ de vitesse de manière quasistatique.

Champ axial appliqué : sur les figures VI.13 (a), (b) sont représentées les évolutions temporelles, ainsi que les densités de probabilité non réduites et non centrées du coefficient $a_1(t)R/2$ dans le cas de l'effet Ω (figure (a)), et du coefficient $a_0(t)$ (figure (b)) filtrés à l'aide d'un filtre passe-bas Butterworth d'ordre 6, et de fréquence de coupure $f_c = 30$ Hz. Sur chacune des figures, nous avons matérialisé la valeur moyenne par un trait plein horizontal, et par des pointillés, les niveaux de fluctuation à $\pm 20\%$ de la valeur moyenne. Ces deux figures montrent que les fluctuations des coefficients sont d'amplitudes très différentes selon la configuration étudiée. Dans le cas de l'effet de la rotation différentielle, nous trouvons que la pente fluctue beaucoup autour de sa valeur moyenne avec un rapport $\mathcal{R} = a_{1,\text{rms}}/\langle a_1 \rangle = 114\%$ alors que pour l'effet de la recirculation poloïdale, $a_0(t)$ ne s'écarte jamais largement de la valeur moyenne, donnant un rapport $\mathcal{R} = a_{0,\text{rms}}/\langle a_0 \rangle = 20\%$. On retrouve donc à l'aide des coefficients le résultat obtenu au paragraphe VI.4.1. Le champ

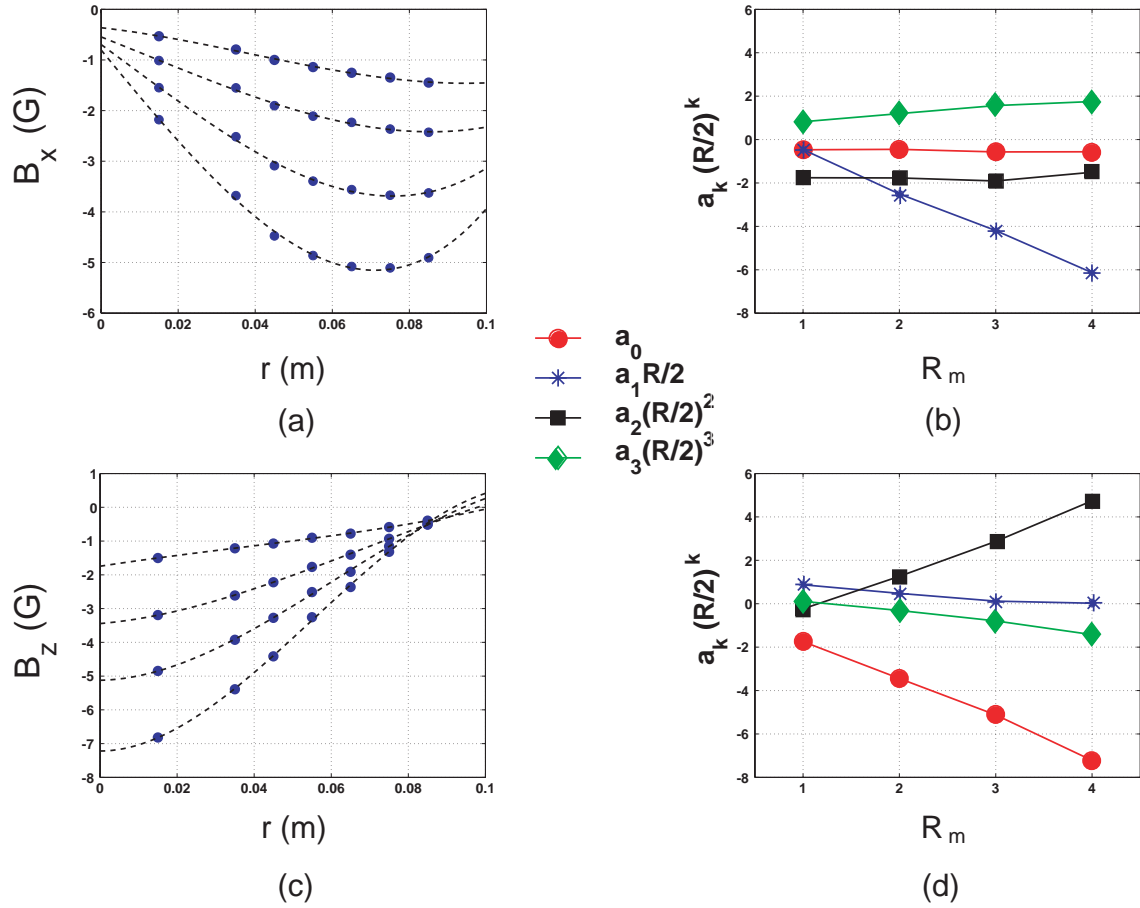


Fig. VI.11: Champ transverse appliqué. Figure (a) : ronds pleins (●), moyenne temporelle des profils radiaux de la composante B_z (effet C.L.) mesurés pour $R_m = 1, 2, 3$ et 4. Lignes tiretées (- -), ajustements polynomiaux correspondants. Figure (b) : effet C.L., évolution des coefficients $a_k (R/2)^k$ (en gauss) en fonction de R_m . (●) a_0 , (*) $a_1 R/2$, (■) $a_2 (R/2)^2$, (◆) $a_3 (R/2)^3$. Figure (c) : ronds pleins (●), moyenne temporelle des profils radiaux de la composante B_x (effet de compression) mesurés pour $R_m = 1, 2, 3$ et 4. Lignes tiretées (- -), ajustements polynomiaux correspondants. Figure (d) : effet de compression, évolution des coefficients $a_k (R/2)^k$ (en gauss) en fonction de R_m . (●) a_0 , (*) $a_1 R/2$, (■) $a_2 (R/2)^2$, (◆) $a_3 (R/2)^3$.

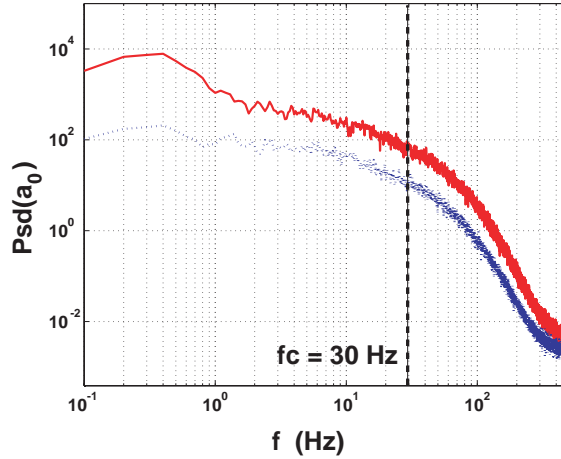


Fig. VI.12: Spectres de puissance du coefficient a_0 pour $\Omega = 10$ Hz. Ligne pleine (-) densité spectrale de puissance du coefficient $a_0(t)$ pour l'effet de compression d'un champ transverse. Ligne tiretée (- -) effet d'étirement d'un champ axial.

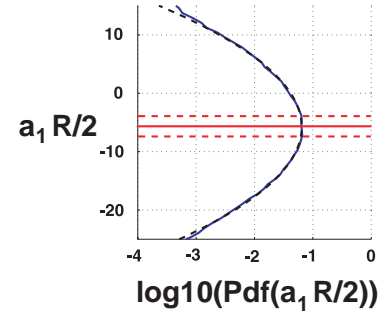
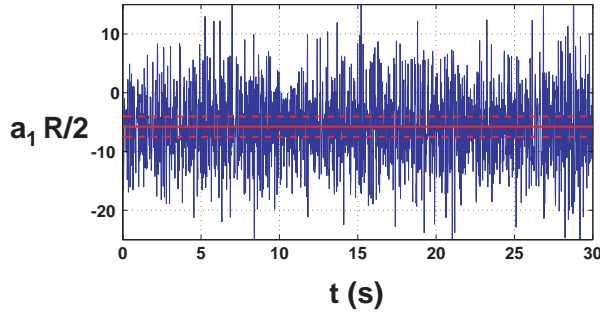
induit par la rotation différentielle fluctue beaucoup plus que celui obtenu par l'effet du pompage, qui donne un taux de fluctuations comparable aux 20% obtenus lorsqu'un seul des deux disques est en rotation. Puisque pour la gamme de fréquences considérée (qui ne correspond pas à la turbulence), le champ magnétique évolue de manière quasistatique avec les fluctuations de vitesse, nous en déduisons que ce sont les composantes de contrarotation d'une part, et de recirculation d'autre part, qui fluctuent différemment.

Toutefois, nous observons que dans les deux configurations étudiées, les densités de probabilité des fluctuations sont gaussiennes. Elles ne sont donc pas dues à l'évolution déterministe de structures cohérentes existant au sein de l'écoulement, et il nous faut rechercher ailleurs leur origine.

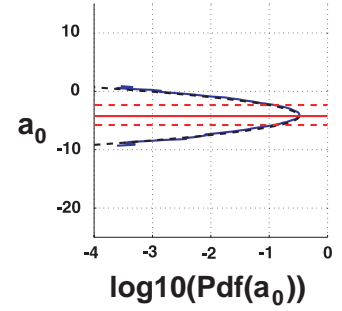
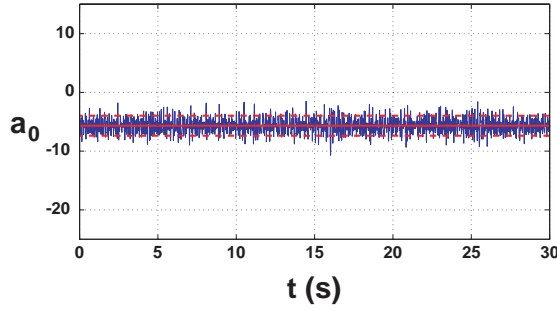
Ceci nous a donc conduit à enregistrer précisément la vitesse de rotation des disques en régime contrarotatif pour vérifier la stabilité du mode de forçage de l'écoulement. Nous avons alors trouvé que non seulement celle-ci est stable à 1% près, mais que conformément aux résultats qualitatifs montrés en figure VI.1, c'est lorsque la contrarotation est symétrique que les fluctuations du champ induit sont maximales !

Champ transverse appliqué : si notre description géométrique à l'aide des coefficients a_0 et a_1 est correcte, alors nous devons trouver en champ transverse appliqué que l'effet C.L. est un miroir de l'effet Ω , et que l'effet de compression est un miroir de l'effet d'étirement.

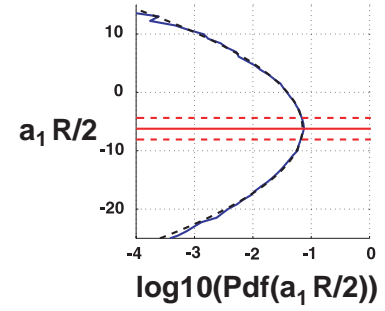
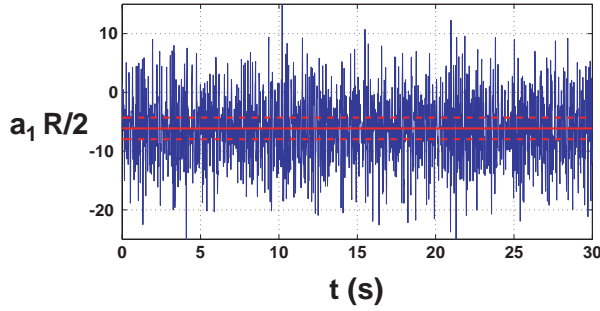
Pour comparer les quatre configurations, nous avons représenté en figures VI.13 (c), (d) les évolutions temporelles, ainsi que les densités de probabilité, des coefficients $a_1(t)R/2$ pour l'effet C.L. (figure (c)), et $a_0(t)$ (figure (d)) pour l'effet de compression. Nous observons que ces deux figures se comparent bien avec leurs homologues obtenues dans le cas du champ axial. En effet, dans le cas de l'effet C.L., nous trouvons que la pente donne un taux de fluctuation $\mathcal{R} = a_{1,\text{rms}}/\langle a_1 \rangle = 160\%$ alors que pour l'effet de compression on a $\mathcal{R} = a_{0,\text{rms}}/\langle a_0 \rangle = 50\%$ pour le coefficient $a_0(t)$. Nous obtenons donc que dans le cas d'un champ transverse, les fluctuations observées sont de même nature, et d'amplitudes comparables à celles observées en champ axial. Elle sont encore gaussiennes et nous retrouvons que l'effet de la rotation différentielle s'écarte beaucoup plus souvent de la moyenne que

(a) champ axial : effet Ω 

(b) champ axial : étirement



(c) champ transverse : effet C.L.



(d) champ transverse : compression

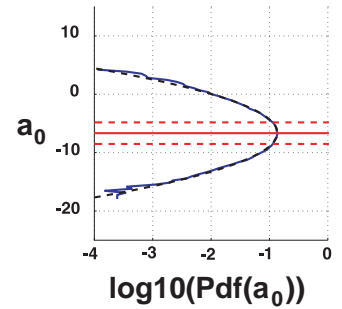
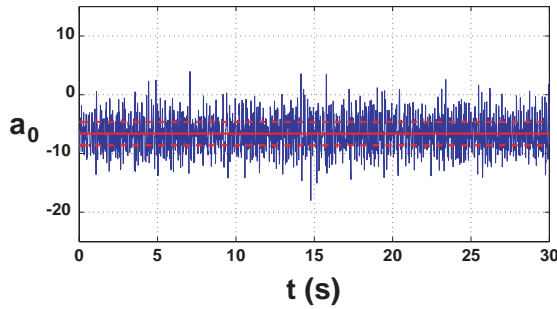


Fig. VI.13: Fluctuations des coefficients des polynômes filtrés basse-bas à 30 Hz pour une vitesse de rotation $\Omega = 10$ Hz : chaque figure présente à gauche l'évolution temporelle du coefficient, et à droite, la densité de probabilité non centrée et non réduite de ses fluctuations. Figure (a) : coefficient $a_1(t)R/2$ dans le cas de l'effets Ω . Figure (b) : $a_0(t)$ dans le cas de l'effet d'étirement du champ axial. Figure (c) : coefficient $a_1(t)R/2$ dans le cas de l'effet des conditions aux limites. Figure (d) : coefficient $a_0(t)$ dans le cas de l'effet de compression du champ transverse. Cette dernière courbe a été filtrée passe bande dans la gamme $[3, 30]$ Hz pour éliminer les fluctuations déterministes associées à la dynamique lente de la couche de mélange (voir paragraphe VI.4.4).

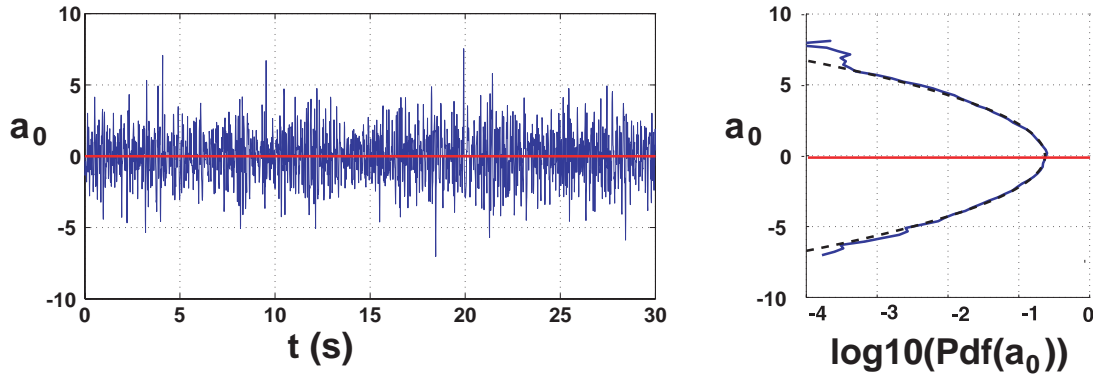


Fig. VI.14: Fluctuations du coefficient a_0 dans la configuration de l'effet Ω et pour une vitesse de rotation égale à 10 Hz. Figure de gauche : évolution temporelle de $a_0(t)$. Figure de droite : densité de probabilité non réduite.

l'effet de la recirculation poléodale. Cependant, alors que ce sont deux effets du pompage, nous observons que l'effet de compression donne un taux de fluctuation $a_{0,\text{rms}}/\langle a_0 \rangle$ 2.5 fois plus grand que celui de l'effet d'étirement. On peut comprendre qualitativement cette différence puisque la vitesse axiale qui engendre l'effet d'étirement, correspond à un écoulement directement engendré par la rotation des disques. Cette composante est sûrement plus stable que la composante radiale, qui converge dans le plan médian pour produire l'effet de compression, et correspond donc à un écoulement de retour du fluide provenant de l'éjection de matière au niveau des disques.

Remarque : nous avons montré ici que les effets du pompage fluctuent toujours moins que les effets de la rotation différentielle. En particulier, dans le cas de l'effet de compression, nous avons obtenu un taux de fluctuations faible pour le coefficient a_0 . Pour obtenir ce résultat, nous avons dû filtrer passe bande le coefficient a_0 de l'effet de compression dans la gamme [3, 30] Hz, ce qui correspond à éliminer la “bosse” existant à basse fréquence dans le spectre de la figure VI.12 (courbe du dessus). Nous verrons au paragraphe VI.4.4 que dans ce cas précis, l'évolution à basse fréquence correspond à une évolution déterministe qui n'a pas de rapport avec les fluctuations gaussiennes que nous discutons ici.

Effet Ω , analyse de $a_0(t)$: si nous avons montré que l'amplitude des effets d'induction fluctue plus largement lorsque ces derniers sont dus à la rotation plutôt qu'au pompage, nous ne savons pas si les fluctuations sont associées à des fluctuations de l'amplitude de l'écoulement, ou à une perte globale de symétrie de celui-ci. Pour mieux comprendre la nature des fluctuations observées dans le cas des effets de la rotation différentielle, nous avons représenté en figure VI.14 l'évolution temporelle et la densité de probabilité du coefficient $a_0(t)$ obtenu dans le cas de la configuration de l'effet Ω . Celui-ci a été obtenu pour une vitesse de rotation de 10 Hz conjointement au coefficient $a_1(t)$ que nous avons représenté figure VI.13 (a). Pour faciliter la lecture, nous avons soustrait sa faible valeur moyenne 0.5 G. En effet, elle est constante en fonction de R_m et ne constitue qu'une mesure de la limite de résolution de notre analyse polynomiale. Nous pouvons constater sur la figure VI.14 que a_0 montre des fluctuations quasi-gaussiennes de déviation standard $a_{0,\text{rms}} = 1.25$ G. Ce coefficient s'écarte donc notablement de la valeur nulle, avec une

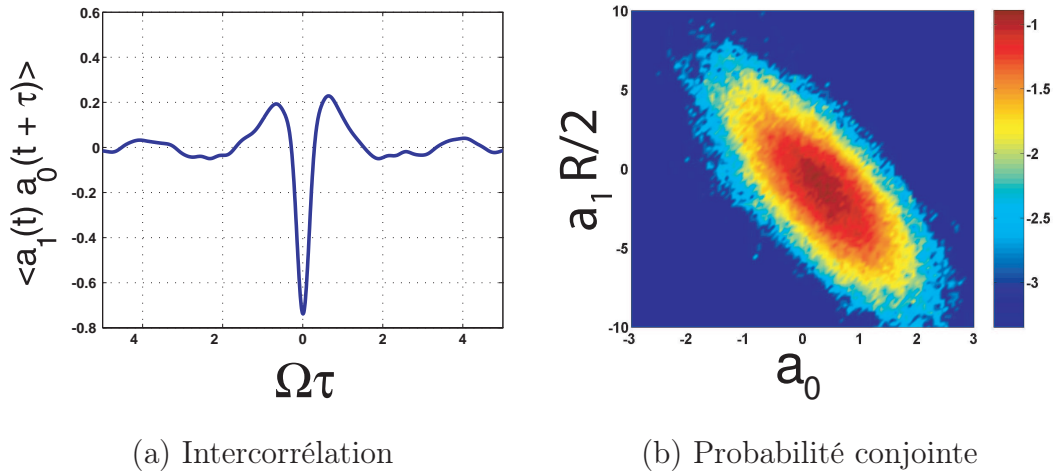


Fig. VI.15: Champ axial appliqué, champ transverse mesuré : figure (a) : fonction d'intercorrélacion des coefficients a_0 et $a_1 R/2$ normalisée par le produit des valeurs rms $a_{0,rms}$ et $a_{1,rms}$. Figure (b) : densité de probabilité conjointe non centrée non réduite des coefficients a_0 et $a_1 R/2$.

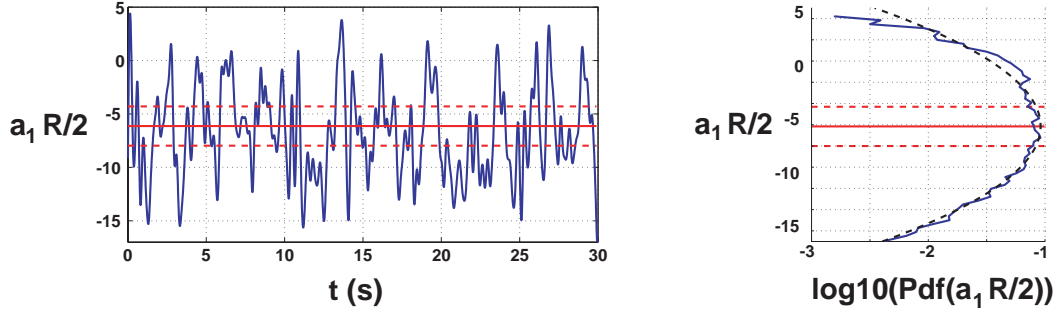
amplitude non négligeable devant la valeur $\langle a_1 \rangle R/2 \sim -2.5$ G, ce qui traduit une perte de la symétrie de révolution du champ induit (donc de l'écoulement).

Pour obtenir une estimation du temps passé par l'écoulement au voisinage de la configuration axisymétrique de von Kármán, nous pouvons définir un critère objectif permettant de décider si une fluctuation de a_0 est compatible avec la symétrie de révolution. En attribuant toute fluctuation de $a_0(t)$ supérieure (en module) à $0.5a_{0,rms}$ à une perte de symétrie de révolution, et puisque les fluctuations de a_0 sont quasi-gaussiennes, on trouve alors que l'écoulement ne passe pas plus de 50% du temps au voisinage d'une configuration axisymétrique.

Les coefficients a_0 et a_1 possèdent de plus une propriété intéressante, qui apparaît clairement sur les figures VI.15 (a) et (b). Ils sont anticorrélés aux temps courts et leur densité de probabilité conjointe, $P(a_0, a_1)$ (représentée en figure (b)), affecte la forme d'une ellipse dont les axes principaux sont tournés d'un angle $\psi \sim 70^\circ$ par rapport aux axes du repère. On en déduit que lorsque l'amplitude de a_1 augmente, la valeur de a_0 diminue (et vice-versa). Les écarts à la moyenne de $a_1(t)$ s'accompagnent donc des écarts de $a_0(t)$, ce qui traduit une perte globale des symétries de l'écoulement. Par ailleurs, ce lien qui unit les évolutions temporelles de $a_0(t)$ et $a_1(t)$ prouve que le profil radial de B_θ fluctue en pivotant autour d'un point situé au voisinage de $r \sim 0.4R$.

VI.4.4 Oscillations basses fréquences

Lors de l'étude précédente, nous avons éliminé l'évolution basse fréquence de l'effet de compression. Toutefois, nous avons pu observer lors de nos études des divers spectres de puissance, qu'une grande quantité d'énergie est stockée dans cette gamme de fréquence. Nous avons représenté sur les figures VI.16 (a),(b) l'évolution temporelle et les densités de probabilité des coefficients filtrés passe-bas avec une fréquence de coupure $f'_c = 3$ Hz. La figure (a) concerne le coefficient a_1 dans le cas de l'effet Ω , et la figure (b) montre

(a) champ axial : effet Ω 

(b) champ transverse : compression

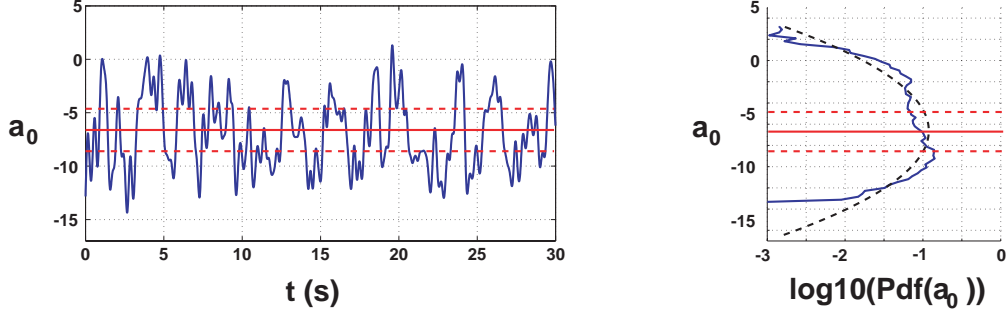


Fig. VI.16: Fluctuations des coefficients des polynômes filtrés passe-bas à 3 Hz pour une vitesse de rotation $\Omega = 10$ Hz : chaque figure présente à gauche l'évolution temporelle du coefficient, et à droite, la densité de probabilité non centrée et non réduite de ses fluctuations. Figure (a) : coefficient $a_1(t)R/2$ dans le cas de l'effet Ω . Figure (b) : $a_0(t)$ dans le cas de l'effet de compression d'un champ transverse.

les courbes obtenues pour le coefficient a_0 de l'effet de compression. La figure (a) montre que dans le cas de l'effet Ω , les fluctuations sont gaussiennes et sont plus faibles que celles observées dans la gamme des fréquences intermédiaires. En revanche la figure (b) montre que les fluctuations basse fréquence de l'effet du pompage présentent une densité de probabilité bimodale avec des excursions de même amplitude que celles observées en figure VI.13 (d). Cette dynamique lente, qui ne se manifeste que lorsque le champ est appliqué dans la direction transverse, doit être associée aux mouvements lents et déterministes de la couche de mélange. Ceux-ci doivent se manifester dans le plan médian sous la forme de fluctuations de vitesse axiale V_z qui interagissent préférentiellement avec un champ transverse $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ au travers du terme source $\partial_x V_z$.

VI.5 Conclusion de l'étude des profils d'induction

Pour deux directions perpendiculaires du champ appliqué, et deux directions de champ induit, il nous a été possible d'enregistrer précisément l'induction simultanément en plusieurs points. En mesurant le champ induit dans le cas de deux effets d'induction faisant appel au rôle de la rotation différentielle, et deux effets d'induction provenant de la structure du point de stagnation du pompage, nous avons observé que le champ induit fluctue largement autour de sa moyenne. Des différences énormes existent entre les propriétés des fluctuations dans les quatre configurations. Aux grandes fréquences les propriétés des

fluctuations sont homogènes, isotropes, et ne dépendent pas de la direction dans laquelle on applique le champ magnétique. En revanche, dans le domaine des basses fréquences ($f \leq \Omega/10$), on observe que la nature des fluctuations du champ induit dépend de la direction du champ appliqué. Ce résultat surprenant nous a amené à abandonner la vision locale des fluctuations du champ induit pour nous concentrer sur les fluctuations des profils d'induction.

- En définissant des quantités géométriques qui sont représentatives des effets d'induction, et en nous restreignant aux fréquences intermédiaires ($f \sim \Omega$), il nous a été possible de relier la nature des fluctuations du champ induit aux variations des composantes de l'écoulement (rotation et pompage) qui engendrent l'évolution temporelle des profils.
- Nous avons alors pu observer, dans ce régime linéaire de bas R_m , que ces fluctuations gaussiennes du champ induit sont beaucoup plus importantes dans le cas des effets de la rotation différentielle que dans le cas des effets du pompage. Celles-ci correspondent à une perte globale de la configuration s_2t_2 de l'écoulement qui passe au moins 50% du temps dans une configuration éloignée de celle de l'écoulement moyen.
- Nous avons enfin observé que l'anisotropie observée entre les configurations axiales et transverses proviennent de la dynamique basse fréquence de la couche de mélange. Celle-ci peut induire des oscillations du champ induit entre deux états dans le cas d'un champ transverse imposé, alors que l'on ne trouve pas de fréquence particulière (ni de bistabilité) dans le cas d'un champ axial appliqué.

Ces observations soulèvent de nouvelles questions quant aux mécanismes d'induction observables dans l'expérience VKS2. En effet, si les fluctuations de vitesse qui emmènent l'écoulement loin de sa structure stationnaire sont quasistatiques dans le gallium, elles évoluent sur des temps comparables au temps de diffusion du dispositif utilisant le sodium. Il est alors possible d'imaginer des mécanismes d'induction non linéaires, dus aux instationnarités du champ de vitesse, qui peuvent contribuer à l'induction stationnaire.

Chapitre VII

Induction aux grands R_m : l'expérience VKS2

Nous abordons dans cette section les premiers résultats obtenus avec l'expérience VKS2, qui a été construite au CEA Cadarache, et utilise le sodium liquide pour atteindre le régime $R_m \sim 50$. Après une description de l'ensemble du dispositif expérimental, nous décrirons les premières mesures obtenues dans deux configurations différentes. Dans la configuration VKS2a, qui est équivalente au dispositif VKS1 entouré d'une couche de sodium au repos, nous étudierons le champ induit en champ transverse appliqué. Nous aborderons ensuite les mesures concernant les fluctuations d'induction dans la configuration VKS2b pour laquelle l'écoulement de von Kármán occupe l'ensemble du volume de la cuve.

VII.1 Description de l'ensemble du dispositif

Comme nous l'avons mentionné lors de la comparaison des dispositifs VKG et VKS2 (section III.2), l'expérience VKS2 est une évolution de l'expérience VKS1 qui utilisait déjà le sodium [16, 58, 79]. La construction de cette nouvelle expérience résulte d'un travail de trois ans des équipes de F. Daviaud au CEA de Saclay, de S. Fauve à l'ENS Paris et de J.-F. Pinton à l'ENS de Lyon. Elle permet, grâce à l'injection d'une puissance de 300 kW dans un écoulement de sodium liquide, d'atteindre des nombres de Reynolds magnétiques de l'ordre de 50, et se situe donc dans la gamme des expériences dynamo. À ce titre, il ne s'agit plus d'un dispositif expérimental souple comme dans le cas de l'expérience VKG, mais d'une expérience lourde qui nécessite que plusieurs personnes soient présentes pour le faire fonctionner. La figure VII.1 montre le dispositif expérimental dans son ensemble. Pour des raisons de sécurité, la cuve (en figures (a) et (b)) est confinée dans une enceinte de protection, et située en hauteur sur un bâti antivibrations. Les quatre moteurs sont situés sous ce bâti (figure (d)), et sont couplés par paires, aux disques, grâce à l'utilisation de paliers et de courroies.

Précautions d'emploi : comme l'expérience utilise un liquide réactif, qui s'enflamme à l'air et réagit de manière explosive au contact de l'eau, le CEA a imposé "quelques" règles de sécurité concernant la construction du dispositif. Le circuit de remplissage sodium est conçu comme une boucle hermétiquement close qui relie la cuve utilisée pour les expériences, l'unité de purification du fluide, et le réservoir servant à stocker le sodium lorsque l'expérience est à l'arrêt. L'ensemble de la boucle fait donc intervenir une circulation de sodium à une température d'environ 150° C, qui est couplée à une circulation de gaz inerte (de l'argon) servant à remplir la cuve (située en hauteur), et à imposer une pression statique sur la cuve. Les figures (e) et (f) montrent le tableau de commande de cette circulation, ainsi que le panneau de contrôle-commande de la boucle sodium.

Description de la cuve : la cuve en cuivre dans laquelle est brassé le fluide est visible sur les figures VII.1 (a) et (b). Son rayon est $R_{ext} = 28.9$ cm, et sa longueur 60.4 cm.

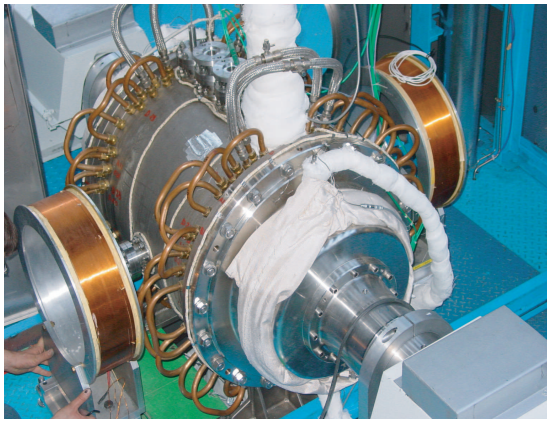
Configuration VKS2a : dans cette configuration, qui est celle de la figure (b), la présence d'une chemise en cuivre de rayon interne $R = 20$ cm et d'épaisseur 5 mm délimite deux zones distinctes. Dans la zone interne, le fluide est mis en mouvement par deux disques à pales courbes de type TM73, de rayon 15.45 cm, et de hauteur 4.12 cm. La distance entre les disques est $H = 42$ cm. Le rapport d'aspect de l'écoulement est alors voisin de 2, ce qui est proche des rapports d'aspect des dispositifs VKG et VKS1. Autour de l'écoulement se trouve une zone d'épaisseur $e = 8.4$ cm dans laquelle le sodium est au repos. Le choix de la nature des disques, de leur rayon, ainsi que de l'adjonction d'une couche de sodium au repos, résulte du travail d'optimisation de l'écoulement moyen effectuée au CEA Saclay en vue de l'obtention expérimentale de l'instabilité dynamo avec le seuil le plus bas possible.

Configuration VKS2b : après un incident ayant entraîné l'arrêt des expériences pendant plusieurs mois, et détérioré la chemise au point de la rendre inutilisable, nous avons supprimé cette dernière lors de la seconde campagne d'expériences effectuée au mois de juillet 2005. Dans cette configuration, il n'y a donc plus de fluide au repos et la zone dans laquelle l'écoulement est intense est plus étendue. Lorsqu'on compare la distance séparant les disques au diamètre de l'expérience, on trouve alors un rapport d'aspect d'environ 1.3 ce qui est nettement plus petit que dans la configuration VKS2a. De même, dans ce cas, la taille des disques comparée au rayon externe est aussi plus faible. L'écoulement moyen possède alors toujours une structure s_2t_2 , mais nous ne connaissons pas précisément sa topologie.

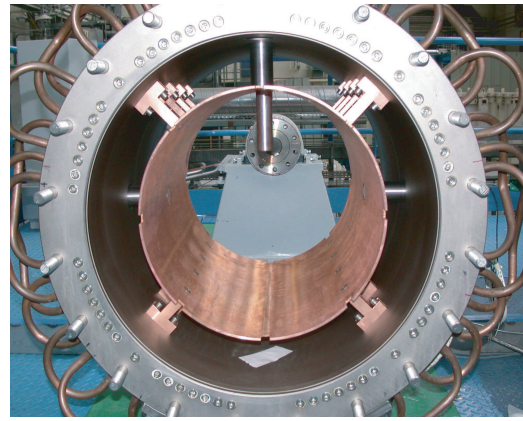
Les moteurs : dans toutes les expériences, nous avons gardé la vitesse des disques constante grâce à quatre moteurs qui peuvent délivrer une puissance totale de 300 kW. Chaque disque est donc couplé par deux courroies à une paire de moteurs asservis en structure maître esclave. Avec cette puissance disponible, on peut alors atteindre la fréquence maximale de $\Omega_a = 29$ Hz en présence de la chemise en cuivre, et une fréquence maximale $\Omega_b = 24$ Hz dans la configuration VKSb.

Limitations : les dispositifs de type von Kármán ont en commun de nécessiter un passage d'arbre moteur pour entraîner les disques. Ce sont donc en général les garnitures qui assurent l'étanchéité dynamique des passages d'arbre qui déterminent quand on doit démonter le dispositif pour révision. Nous avons utilisé des garnitures Burgmann spécialement développées pour VKS2, qui sont assez coûteuses, fragiles (elles sont en carbure de silicium, ce qui les rend très cassantes), et difficiles à changer une fois détériorées. Le fabricant ayant assuré qu'il faut une vitesse minimale $\Omega_{min} \sim 6$ Hz pour assurer leur lubrification, nous avons décidé de ne faire des mesures qu'à des vitesses supérieures à $\Omega = 8$ Hz.

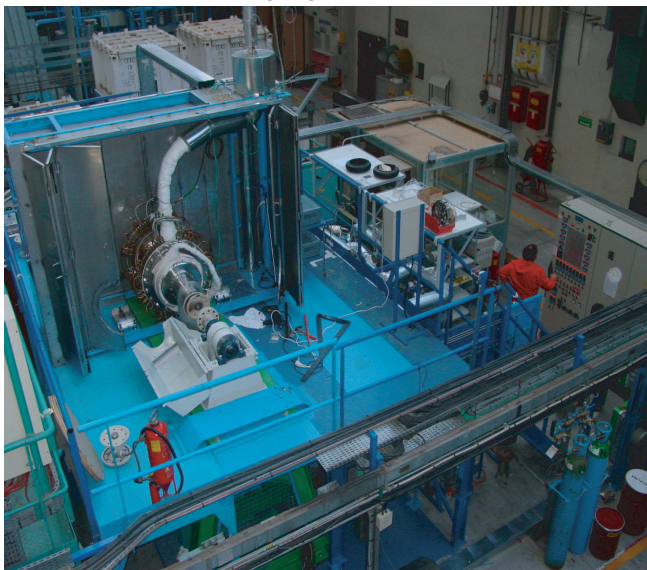
Dispositif de refroidissement : pour pouvoir travailler à température constante, et ainsi faire des acquisitions longues, nous utilisons un échangeur thermique d'une capacité de 200 kW. Il assure une circulation d'huile plus froide que le sodium dans la paroi de la cuve en cuivre, dont on peut voir les tuyaux de recirculation sur les photographies (a) et (b). Lors des expériences, il est donc possible de fonctionner en régime permanent avec une température constante jusqu'à 26 Hz avec la chemise, ce qui correspond à une puissance évacuée (lue sur les variateurs de vitesse) égale à 170 kW environ.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. VII.1: Vue d'ensemble du dispositif VKS2 : la cuve (figures (a) et (b)) est fixée en hauteur sur un bâti à l'intérieur d'une enceinte de confinement (figure (c)). Chaque paire de moteurs (figure (d)) est située sous le bâti et reliée à l'arbre moteur par un ensemble de deux courroies. Les photographies (e) et (f) montrent les panneaux de contrôle du circuit d'argon et de la boucle sodium.

VII.2 Mesures en configuration VKS2a

VII.2.1 Configuration expérimentale

Dans cette section, nous étudions l'amplification d'un champ transverse appliqué dans la direction Ox . Celui-ci est produit à l'aide de deux bobines distantes d'environ 1 m (figures VII.1 (a) et VII.2), ce qui permet d'obtenir un champ appliqué d'amplitude typique 3 G au centre du cylindre, et homogène à 10% près à l'échelle de l'expérience. Cette configuration de champ transverse est intéressante car les simulations numériques ont montré que le mode le plus instable de la dynamo de von Kármán possède une forte composante transverse localisée dans le plan médian. Nous savons de plus qu'aux faibles R_m , l'effet de compression induit un champ opposé au champ appliqué. Si on observe une composante induite B_x de même sens que le champ appliqué, on aura donc une mesure du bouclage positif du système.

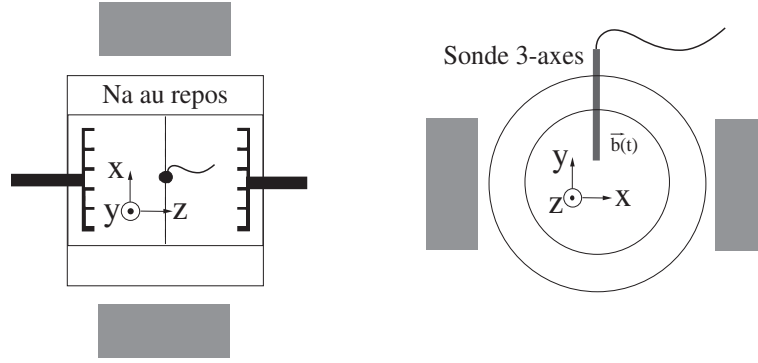


Fig. VII.2: Dispositif expérimental utilisé lors de la campagne de mesures VKS2a. La sonde 3-axes du gaussmètre est placée dans le plan médian parallèlement à l'axe Oy et permet de mesurer les trois composantes du champ induit à 10 cm de l'axe Oz . Le champ magnétique appliqué est uniforme, d'amplitude 2.7 G, et parallèle à Ox .

Nous avons enregistré le champ induit à l'aide d'une sonde à effet Hall 3-axes connectée au gaussmètre déjà utilisé pour les mesures dans le gallium à Lyon. Durant l'ensemble des expériences, nous avons positionné la sonde parallèlement à l'axe Oy dans le plan médian, et enregistré les trois composantes du champ induit à une distance de 10 cm de l'axe Oz .

VII.2.2 Résultats pour l'induction moyenne

Les figures VII.3 (a), (b) montrent l'évolution en fonction de R_m de la valeur moyenne (figure (a)), et de la valeur rms (figure (b)) des trois composantes du champ magnétique induit en $r = R/2$ le long de Oy . Ces mesures ont été obtenues avec une fréquence d'échantillonnage de 5 kHz, et une durée d'acquisition $T = 120$ s, suffisamment longue pour qu'on enregistre le signal pendant plus d'un millier de temps de retournement. Nous pouvons voir sur la figure VII.3 (a) que la valeur moyenne du champ vertical induit $\langle B_y \rangle$ est proche de zéro quel que soit le R_m considéré. Les deux autres composantes de champ induit, B_x et B_z , sont beaucoup plus grandes puisqu'on a $B_x \sim 6$ G et $B_z \sim 9$ G pour

$R_m = 47$. On observe de plus que la composante axiale B_z est plus grande que B_0 pour toutes les vitesses de rotation explorées ($\Omega > 8$ Hz). Elle domine la composante transverse B_x qui devient plus grande que B_0 lorsque $R_m > 20$. Enfin, cette figure montre un résultat surprenant : alors qu'on atteint un régime pour lequel le champ induit est plus grand que le champ appliqué, les deux courbes évoluent linéairement en fonction de R_m sur l'ensemble de la plage de mesure. Nous pouvons constater sur la figure (b) que les déviations standards évoluent elles aussi linéairement en fonction de R_m , et retrouvons donc les résultats déjà observés avec les dispositifs VKG et VKS1.

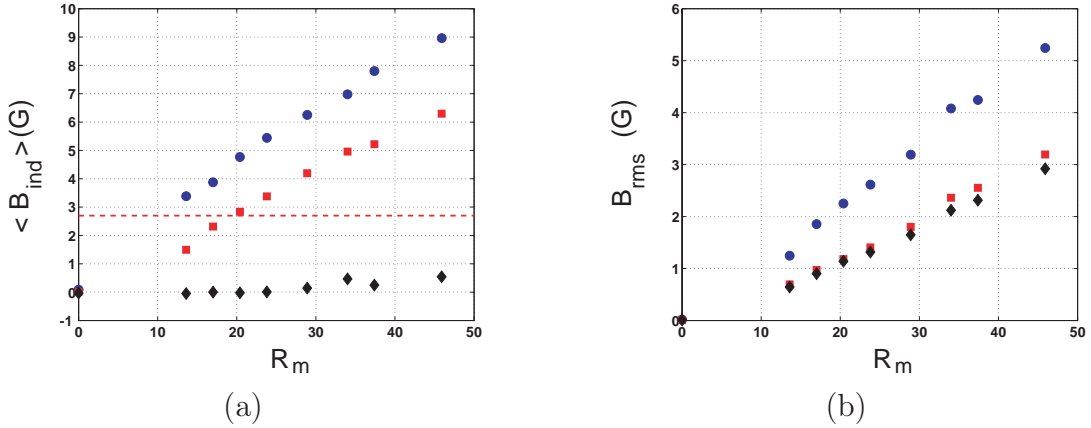


Fig. VII.3: Champ transverse appliqué $B_0 = 2.7$ G. Évolution du champ induit en fonction de R_m : Figure (a) : valeur moyenne $\langle B \rangle$. Figure (b) : valeur rms du champ induit. Dans les deux cas, les conventions de représentation sont les mêmes : (■) composante transverse B_x , (◆) composante verticale B_y , (●) composante axiale B_z . Le R_m est calculé en supposant que la température du sodium est la même pour chacune des vitesses.

Pour pouvoir interpréter l'évolution et le signe des valeurs moyennes, nous les comparons aux valeurs obtenues en champ transverse, au même point de mesure, mais avec des disques TM60 et le dispositif VKS1. Comme nous sommes dans un régime de vecteur passif, le champ induit est proportionnel à l'amplitude du champ appliqué B_0 (ce qui a été vérifié expérimentalement dans ces deux cas). Nous avons donc représenté sur les figures VII.4 (a),(b) les valeurs moyennes sous leur forme adimensionnée B_{ind}/B_0 . La figure VII.4 (a) montre donc les mêmes mesures que celles de la figure VII.3 (a), tandis que la figure VII.4 (b) est tirée de la référence [16]. Pour plus de clarté, dans le cas des disques TM60, nous avons retracé la figure avec les mêmes conventions de symbole et d'axe que celles de la figure VII.4 (a). On peut alors comparer directement les deux figures, dont les différences ne sont dues qu'à la nature des disques (figures III.4 (b) et (c)), et à la présence du sodium au repos pour VKS2.

À première vue, la configuration VKS2a apparaît comme un bien meilleur amplificateur que VKS1. En effet, nous observons dans le cas de VKS2 qu'au delà de $R_m = 20$, B_x et B_z sont simultanément plus grands que B_0 . Toutefois, ces deux expériences montrent que B_z évolue en fonction de R_m selon la relation $B_z/B_0 = R_m/15$. La courbe en ronds pleins de la figure (a) est donc un prolongement de celle de la figure (b), et il semble que l'ajout de la couche de sodium au repos influe peu sur la conversion du champ transverse appliqué en un champ axial. La différence entre les amplitudes maximales tient donc uniquement

au fait que la puissance disponible est plus grande dans le cas de VKS2.

Nous observons de plus que dans les deux cas (figures (a) et (b)), la composante B_y est très faible, ce qui provient des propriétés de symétrie de \mathbf{B}_0 et de $\langle \mathbf{V} \rangle$ lors d'une rotation d'angle π autour de Oz , qui imposent au champ vertical d'être nul dans le plan médian. Contrairement aux mesures dans le gallium, qui avaient montré l'induction d'une composante transverse opposée au champ appliqué, la composante B_x induite dans VKS2a renforce le champ appliqué pour toutes les valeurs de R_m explorées. Ce résultat est en accord avec l'évolution de B_x représentée en figure VII.4 (b), qui montre que la composante transverse est de même sens que le champ appliqué dès lors que R_m est supérieur à 10. Ce résultat constitue une preuve du comportement non linéaire du système, qui tend à faire boucler positivement le champ magnétique induit par rapport au champ appliqué. Il semble d'ailleurs que ce bouclage soit meilleur dans le cas de VKS2a puisque le rapport B_x/B_0 égal à 1 pour $R_m = 20$, alors qu'il est égal à 0.2 dans le cas de VKS1. Ainsi, seule l'évolution de la composante transverse induite permet d'observer une différence entre les mesures dans VKS1 et dans VKS2a. Il faut sans doute voir ici un effet de la couche de sodium au repos qui permet un meilleur bouclage entre le champ induit et le champ appliqué.

Malgré ce fort bouclage positif, et bien qu'on ait obtenu un rapport B_x/B_0 supérieur à l'unité pour les grandes valeurs de R_m , nous n'avons pas observé l'apparition de l'instabilité dynamo. Il n'est toutefois pas surprenant de mesurer localement un champ induit plus grand que le champ appliqué sans qu'il y ait instabilité puisque le critère d'apparition de cette dernière fait intervenir le recouvrement de \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_{ind} sur l'ensemble du volume du fluide. Il apparaît tout de même surprenant qu'à $R_m \sim 40$, en présence d'un bouclage positif de B_x avec B_0 , le champ induit évolue encore linéairement en fonction de R_m .

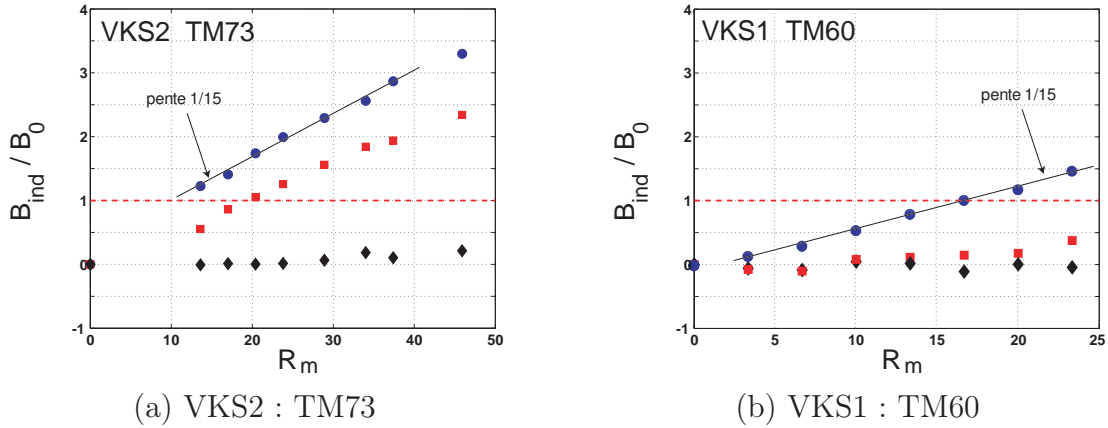


Fig. VII.4: Induction moyenne en fonction de R_m . Les mesures ont été faites en $r = R/2$ le long de Oy , et ont été normalisée par la norme du champ appliqué. Figure (a) VKS2 et disques TM73. Figure (b) VKS1 et disques TM60. Conventions : (■) composante transverse B_x , (◆) verticale B_y , (●) axiale B_z . Lignes pleines (-) : droites de pente 1/15.

Comparaison aux simulations : pour tenter de comprendre l'origine de cette linéarité, nous avons mis en oeuvre la simulation itérative en utilisant le champ de vitesse moyen des disques TM73, fourni par F. Ravelet, et qui résulte d'une mesure par LDV dans le dispositif von Kármán eau (VKE) [87]. Pour les calculs, nous avons supposé que l'enveloppe extérieure était constituée d'une couche de sodium au repos d'épaisseur égale à 40% du rayon R . Pour un champ appliqué d'amplitude unité, nous représentons sur les

figures VII.5 (a) et (b) les résultats expérimentaux, ainsi que les résultats obtenus par simulation numérique. Contrairement au cas du gallium pour lequel R_m est suffisamment faible pour qu'on puisse se contenter des premiers termes du développement perturbatif, ici R_m est plus grand que le rayon de convergence de la série entière. La figure VII.5 (b) résulte donc d'un calcul des 20 premiers termes de la série entière que l'on a resommés à l'aide de la méthode de Padé.

Contrairement aux résultats obtenus dans VKG et VKS1, qui montraient un accord au moins qualitatif entre expériences et simulations, les figures VII.5 (a) et (b) montrent que l'accord entre les mesures et les simulations est mauvais. Pour $R_m \leq 25$ le champ induit mesuré est nettement plus grand que le résultat des simulations, alors qu'au-delà de cette valeur, ce sont les courbes simulées qui sont systématiquement au dessus des courbes expérimentales. Si la validité de l'approche itérative peut toujours être mise en doute, nous signalons que l'évolution non linéaire de $\mathbf{B}_{ind}(R_m)$ obtenue avec la simulation itérative est comparable à celle obtenue en utilisant le code cinématique du CEA de Saclay (manuscrit de thèse de F.Ravelet p.196). L'écart observé entre l'expérience et la simulation ne peut donc être attribué à une erreur numérique lors de la résolution de l'équation d'induction.

Conclusion des mesures d'induction stationnaire : il faudra donc rechercher la cause du désaccord si flagrant entre les prédictions basées sur la forme de l'écoulement moyen, et l'évolution linéaire du champ induit. Nous pouvons donner ici deux pistes :

- Nous n'avons pas pris en compte la présence de la chemise en cuivre qui sépare l'écoulement de la zone où le sodium est au repos. Or il a été montré sur l'exemple de l'écoulement engendré dans VKS1 par les disques TM60 ([13], p.213), qu'il faut prendre en compte la couche de cuivre de 1 cm d'épaisseur qui entoure VKS1 pour décrire correctement l'évolution de la composante axiale B_z en fonction de R_m . Lorsqu'on ne le fait pas, on sous-estime numériquement l'amplitude de B_z à bas R_m , et on ne décrit pas l'évolution linéaire de B_z en fonction de R_m .
- Une seconde possibilité réside dans la présence des instationnarités de l'écoulement à grande échelle, que nous avons mises en évidence dans l'écoulement de gallium et qui peuvent contribuer à l'induction stationnaire dans le régime non linéaire. Un tel mécanisme d'induction, rendu possible par le mélange non linéaire des effets d'induction d'une part, et par le grand temps de diffusion $\tau_{diff} \sim 1$ s du dispositif d'autre part, serait impossible à prendre en compte dans nos codes actuels.

VII.2.3 Fluctuations du champ magnétique induit

Les résultats obtenus dans la configuration VKS2a sont résumés sur la figure VII.6. Les figures VII.6 (a), (b), et (c) montrent l'évolution temporelle de la composante transverse du champ induit pour $R_m = 46$ (figure (a)), l'évolution de l'induction moyenne en fonction de R_m (figure (b)), ainsi que l'évolution de la valeur rms des trois composantes du champ induit en fonction de R_m (figure (c)). Les figures VII.6 (d), (e), et (f) montrent l'évolution du logarithme des PDF des composantes B_x , B_y et B_z pour trois vitesses typiques 10, 20 et 27 Hz, qui correspondent à $R_m = 17$, 34, et 46 respectivement. Afin de pouvoir comparer les courbes obtenues à différentes vitesses, les PDF ont été centrés, réduits par la valeur rms de la composante correspondante.

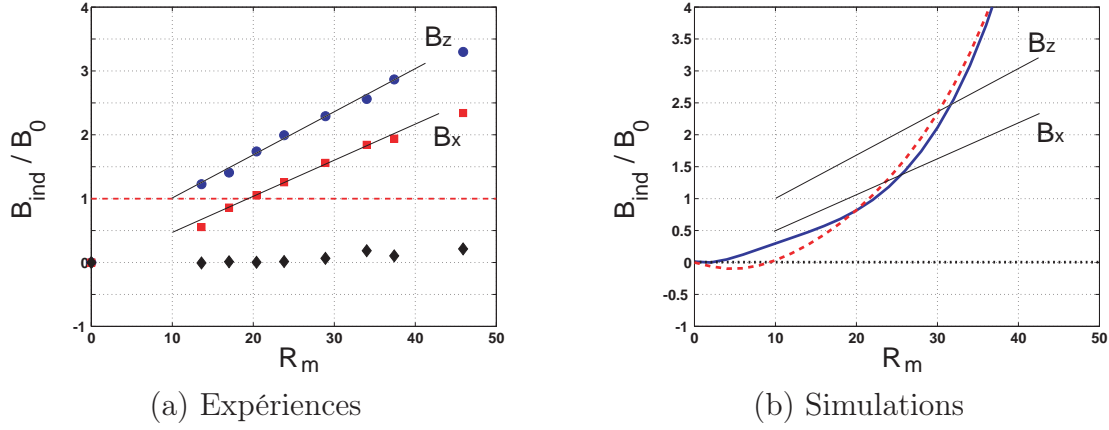


Fig. VII.5: Comparaison entre la prévision numérique utilisant la méthode itérative, et les données expérimentales. Figure (a) : mesures expérimentales normalisées par B_0 , (■) B_x , (◆) B_y , (●) B_z . Figure (b) : résultat de la simulation numérique après resommation de la série : ligne tiretée (--) B_x , ligne pleine (-) B_y , ligne pointillée (·) B_z . Les droites (fines lignes pleines) représentent l'évolution linéaire mesurée expérimentalement pour les composantes B_x et B_z .

La figure (a) montre que B_x fluctue très largement autour de sa valeur moyenne, et que ses fluctuations ne semblent ni régulières, ni symétriques puisque les grandes déviations semblent toujours être de même signe que celui du champ appliqué. Ces grands événements sont localisés dans le temps sous forme de bouffées de signal de largeur typique $\delta t \sim 0.5$ s, ce qui est comparable au temps de diffusion magnétique. Le caractère dissymétrique et intermittent de la composante transverse apparaît plus clairement lorsqu'on considère la figure VII.6 (d), qui représente sa densité de probabilité. Celle-ci est non gaussienne, asymétrique, et affecte une forme d'exponentielle pour les grandes valeurs positives.

Cette intermittence n'est toutefois pas une caractéristique commune des trois composantes puisque la densité de probabilité de B_y est quasi gaussienne (figure (e)). La composante B_z montre une densité de probabilité bimodale, qui rappelle les effets de la couche de mélange rencontrés lors l'étude des fluctuations dans VKG.

Les figures (d), (e) et (f) montrent par ailleurs que les courbes centrées et réduites obtenues pour les différentes valeurs de R_m se superposent avec un bon accord. Ceci tend à montrer que la nature des fluctuations ne dépend plus de la vitesse dès lors que R_m est supérieur à 15.

Alors que nous avons observé des densités de probabilité très différentes pour les trois composantes du champ induit, les spectres de puissance montrent des évolutions similaires en fonction de la fréquence (figure VII.7). Ils possèdent la même allure que ceux déjà obtenus dans le gallium avec un comportement en loi de puissance d'exposant voisin de -1 à basse fréquence, ce qui avait déjà été observé avec VKS1. Toutefois, et contrairement à VKS1, il ne nous a pas été possible d'observer une loi de puissance d'exposant $-11/3$ dans le régime des hautes fréquences. Ces résultats semblent robustes, et les spectres obtenus pour différentes vitesses comprises entre 8 et 29 Hz se superposent lorsqu'on les trace en fonction de la fréquence réduite f/Ω .

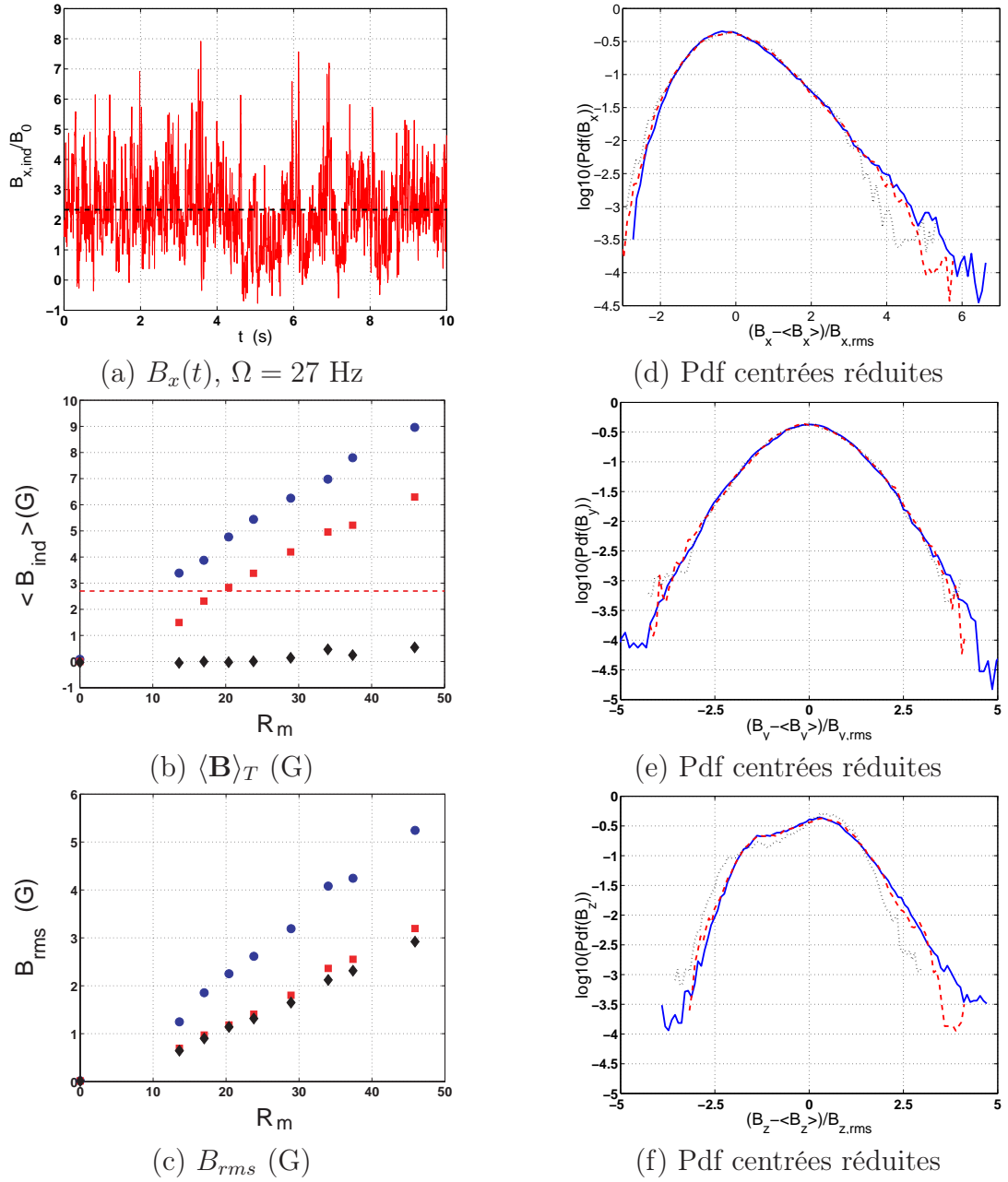


Fig. VII.6: Configuration VKS2a, effet d'un champ transverse homogène : Figure (a) : évolution temporelle de B_x pour $\Omega = 27$ Hz. Figures (b) et (c) : valeurs moyennes et valeurs rms en fonction de R_m . Conventions : (■) B_x , (◆) B_y , (●) B_z . Figure (d) : densité de probabilité centrée et réduite de B_x . Figure (e) : densité de probabilité centrée et réduite de B_y . Figure (f) : densité de probabilité centrée et réduite de B_z . Les trois courbes correspondent à $R_m = 17$ (:), 34 (- -), et 46 (-).

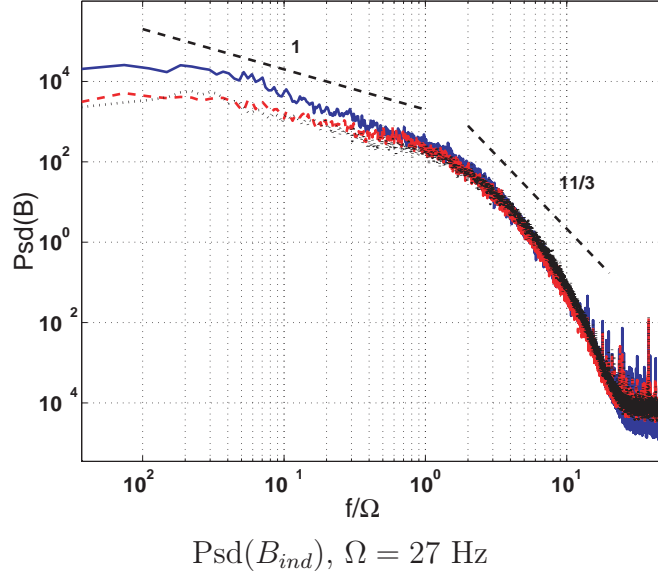


Fig. VII.7: Configuration VKS2a, effet d'un champ transverse homogène : Densité spectrale de puissance des trois composantes du champ induit. Ligne tiretée B_x , ligne pointillée B_y , ligne pleine B_z .

VII.2.4 Conclusion des mesures faites en configuration VKS2a

Avec le dispositif VKS2, nous avons mesuré un champ transverse induit plus intense que le champ appliqué, ce qui prouve que le nouveau dispositif est plus efficace que VKS1 pour obtenir un bouclage positif. Toutefois, en l'état actuel des choses, on ne peut pas expliquer l'évolution linéaire de l'induction moyenne en fonction de R_m , et il semble que les simulations numériques utilisant l'écoulement moyen ne sont plus d'aucun secours (jusqu'à ce que nous comprenions pourquoi). Ce résultat est sans doute à rapprocher du point suivant : les simulations numériques utilisant l'écoulement moyen mesuré dans l'eau ont montré que dans la configurations VKS2a, l'instabilité dynamo doit avoir lieu pour une vitesse de 23 Hz et une température de 110 °C, ou encore pour une vitesse de 27 Hz à 180 °C [87]. Il nous a donc été possible au cours de la première campagne de mesures de dépasser le seuil numériquement prévu, et d'atteindre des régimes de fonctionnement situés au-delà de ce dernier. Malgré une marge en puissance supérieure à 20% par rapport à la puissance théoriquement nécessaire, nous n'avons pas observé l'auto-excitation du champ magnétique. Le dispositif VKS2 reste donc pour l'instant une expérience d'induction, et il nous faudra comprendre pourquoi. Cette campagne de mesure aura toutefois donné des résultats assez surprenants : pour la première fois nous avons mis au jour la présence de fluctuations de champ induit dont les PDF sont nettement asymétriques et non gaussiennes. Cette dynamique intermittente du champ induit ne semble toutefois pas provenir d'une dynamique intermittente du champ de vitesse (nous l'aurions vu dans le gallium), mais doit être une caractéristique du régime de fonctionnement de l'expérience. Reste à déterminer si c'est le caractère non linéaire (grand R_m), et/ou le grand temps de diffusion $\tau_{\text{diff}} \geq 10/\Omega$, qui provoque l'apparition de cette dynamique intermittente.

Remarque : cette section ne contient que les premières données de l'expérience dans la configuration optimisée VKS2a. Il est à regretter que nous n'ayons pu faire de mesures

avec des vitesses plus faibles, et que n'ayons pas pu mesurer le champ induit en d'autres endroits du dispositif. Ceci tient à une raison très simple : l'expérience a tourné pour la première fois au mois d'avril 2005, avant qu'un incident survienne et endommage à la fois les disques et la chemise en cuivre. Afin de pouvoir reprendre les mesures le plus rapidement possible, nous avons donc décidé d'abandonner l'utilisation de la chemise en cuivre pour tourner dans la nouvelle configuration nommée VKS2b. Les résultats préliminaires obtenus resteront donc malheureusement pour l'instant inexplicables.

VII.3 Mesures en configuration VKS2b

Dans la configuration VKS2b, dont nous donnons une représentation schématique en figure VII.8, les disques sont toujours de type TM73, mais la chemise en cuivre qui délimitait une zone de fluide au repos a été enlevée. Il existe donc un nouvel écoulement à l'intérieur du cylindre, mais qui possède encore la structure s_2t_2 . Nous retrouverons donc les mêmes mécanismes de base qui régissent l'amplification du champ magnétique.

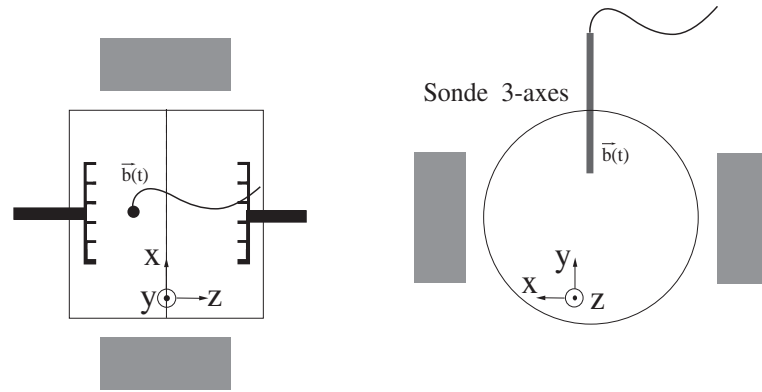


Fig. VII.8: Configuration expérimentale VKS2b. La chemise en cuivre a été enlevée et tout le sodium est maintenant en mouvement. La sonde 3-axes du gaussmètre est placée parallèlement à l'axe Oy , mais dans un plan décalé de 11 cm par rapport au plan médian. Les bobines qui créent le champ transverse sont les mêmes que celles utilisées pour VKS1a. L'amplitude du champ appliqué est de l'ordre de 3 G.

Lors de la campagne de mesure de juillet 2005, nous avons disposé deux doigts de gant susceptibles d'accueillir la sonde de champ magnétique. Le premier est situé dans le plan médian parallèlement à la direction Ox , il est long et plonge jusqu'au cœur de l'écoulement en $r = 4.5$ cm. Le second a été placé parallèlement à l'axe Oy , mais dans un plan décalé de 11 cm par rapport au plan médian (figure VII.8). Il est plus petit que le premier et permet de faire la mesure à une distance $r = 9.5$ cm de l'axe de rotation. Nous n'exposerons ici que les mesures faites dans le plan décalé, parallèlement à Oy , car elles se comparent mieux à celles obtenues en configuration VKS2a.

Remarque : il est naturel dans une telle configuration de se demander si la présence d'un doigt de gant dans un plan décalé ne fait pas bifurquer l'écoulement moyen vers une configuration à une cellule (s_1t_1). Dans une telle situation, l'un des deux disques n'entraînerait pas de fluide, et l'une des paires de moteurs fournirait une puissance négligeable devant

l'autre. Pour nous assurer que ce n'était pas le cas, nous avons vérifié par des mesures sur les variateurs que les quatre moteurs fournissaient la même puissance, garantissant ainsi que les disques entraînent le fluide de la même manière.

Définition de R_m : comme nous ne connaissons pas les caractéristiques précises de l'écoulement (non mesuré en eau pour l'instant), nous avons gardé la même définition de R_m que pour la configuration VKS2a. Celui-ci est donc défini par la relation :

$$R_m = \frac{2\pi\Gamma R^2\Omega}{\lambda}, \quad (\text{VII.1})$$

où $R = 20$ cm est le rayon de la chemise en cuivre, et Γ est le coefficient d'efficacité des disques TM73 lorsque le rapport d'aspect de l'écoulement est $H/R = 2$.

VII.3.1 Effet d'un champ transverse homogène

Induction moyenne : la figure VII.9 (b) montre l'évolution des composantes moyennes du champ magnétique induit (normalisé par B_0) en fonction de R_m . Contrairement au cas de la configuration VKS1a, aucune des composantes de \mathbf{B}_{ind} n'est voisine de zéro. C'est même la composante B_y qui domine au point de mesure puisqu'elle est 1.5 fois plus grande que B_0 alors que les composantes B_x et B_z sont deux fois plus petites que B_0 . Ceci tient au fait qu'en dehors du plan médian, et pour $r \neq 0$, aucun argument de symétrie n'impose au champ induit de s'annuler. Dans ce plan décalé, où la rotation est forte, la prédominance de B_y parallèlement à Oy s'explique par l'image classique de l'effet de la composante de rotation sur le champ transverse. Elle induit une composante de champ perpendiculaire au champ appliqué comme nous l'avons vu lors de notre analyse de l'effet C.L. dans l'expérience VKG (figures IV.9 (a) et (b)).

Contrairement à la configuration VKS2a, qui avait montré une évolution linéaire des composantes en fonction de R_m , il semble que B_y/B_0 sature vers la valeur 1.5 lorsqu'on augmente la vitesse. Toutefois, au cours de l'acquisition à $R_m = 42$, la température a augmenté de 20° C, ce qui correspond à une diminution de la conductivité du sodium (donc de R_m) d'environ 8%.

Étude des fluctuations : la figure VII.9 (a) montre l'évolution temporelle de la composante B_x du champ induit pour la fréquence maximale atteinte (24 Hz, $R_m = 42$). Comme dans le cas de la configuration VKS2a, on observe la présence d'intenses pics de même signe que celui du champ appliqué. Cette dynamique non gaussienne apparaît nettement sur la figure VII.9 (d), qui représente la PDF centrée et réduite de la composante B_x . Nous retrouvons que celle-ci est asymétrique, alors que celle de la composante B_y est gaussienne (figure (e)). Contrairement à la configuration VKS1a, la composante B_z ne montre plus de comportement bistable, et sa PDF est maintenant symétrique et gaussienne.

Comme le montre la figure VII.9 (c), qui représente l'évolution des valeurs rms des composantes du champ induit en fonction de R_m , à ces fluctuations gaussiennes de la composante axiale correspond un taux de fluctuation beaucoup plus faible. En effet, alors que pour VKS2a on avait $B_{z,rms} \sim 1.6B_{y,rms}$, on a $B_{z,rms} \sim B_{y,rms}$ pour VKS2b. Le champ induit fluctue donc moins, ce qui peut avoir deux origines : soit la couche de mélange est "plus calme" en configuration VKS2b, soit la mesure hors du plan médian est moins sensible à la dynamique grande échelle de la couche de mélange. Pour trancher la question, nous

avons analysé les mesures faites dans le doigt de gant horizontal situé dans le plan médian. Nous avons alors observé que les PDF possèdent des formes analogues à celles des mesures effectuées dans le plan décalé. Il semble donc que dans la configuration VKS2b, l'écoulement fluctue moins à grande échelle que dans la configuration VKS2a.

Conclusion : en appliquant un champ transverse homogène en configuration VKS2b, nous avons obtenu des résultats analogues à ceux observés en configuration VKS2a. La composante B_x montre un bouclage positif avec le champ appliqué, et sa dynamique présente un caractère intermittent. Les deux autres composantes du champ induit sont gaussiennes, et l'oscillation caractéristique de la dynamique de la couche de mélange a disparu. Si on admet que cette stabilisation est un ingrédient favorable pour l'obtention de l'instabilité dynamo, alors VKS2b semble posséder quelques avantages sur VKS2a. Toutefois comme les mesures n'ont pas été faites au même point, il est difficile de comparer leurs taux de bouclage respectifs, et on ne peut conclure. Des expériences complémentaires seront faites prochainement dans ce sens.

VII.3.2 Effet d'un champ localisé

Pour aller plus loin dans l'étude de la dynamique du champ induit, nous avons décidé (à l'initiative de l'équipe de l'ENS Paris) de mesurer les effets d'induction dans le cas d'un champ localisé produit par un petit aimant. Cette mesure est intéressante pour deux raisons principales :

- les premières mesures obtenues par l'équipe de Perm dans le gallium, en présence d'un champ axial produit par un aimant, ont montré [71] que le champ induit provient autant de l'advection que de l'étirement des lignes de champ.
- Si le champ est très localisé, alors cette mesure rend au champ magnétique induit son caractère local. En effet, alors que dans le cas d'un champ homogène le champ induit intègre l'ensemble des effets d'induction sur un volume comparable à celui de l'expérience, en champ localisé, ce sont les trajectoires qui transportent le champ de l'aimant vers la sonde qui vont compter préférentiellement.

Nous avons utilisé le dispositif dans la configuration de la figure VII.10, qui ne se distingue de celle de la figure VII.8 que par la nature du champ imposé. La sonde à effet Hall est donc toujours placée au voisinage de $r = 9.5$ cm, et disposée parallèlement à Oy . Les bobines ne sont plus utilisées et le champ imposé est obtenu grâce à un aimant de type NdFeB situé au fond du doigt de gant horizontal (situé à une distance 4.5 cm de l'axe Oz). Celui-ci permet d'obtenir un champ d'amplitude 0.1 T, qui décroît très rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'aimant. Dans cette configuration, la distance entre la sonde et l'aimant est $d = 15$ cm, et l'amplitude du champ $\mathbf{B}_0(\vec{r})$ est très faible au point de mesure : aucune des composantes du champ \mathbf{B}_0 n'excède la valeur 0.3 G en l'absence d'écoulement, ce qui est inférieur à l'amplitude du champ terrestre.

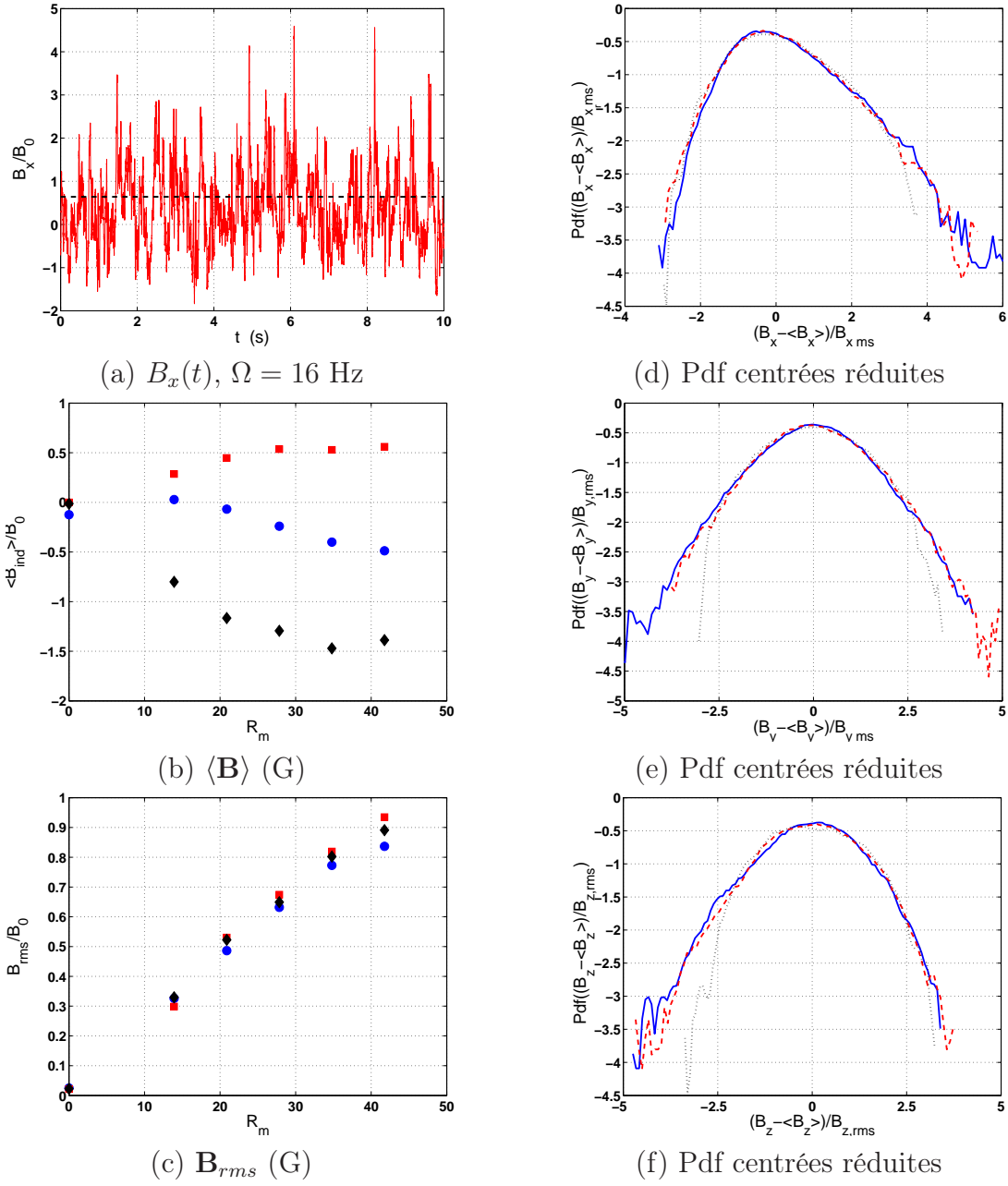


Fig. VII.9: Configuration VKS2b, effet d'un champ transverse homogène : Figure (a) évolution temporelle de B_x pour $\Omega = 16$ Hz ($R_m = 27$). Figures (b) et (c) : valeurs moyennes et valeurs rms en fonction de R_m . Conventions : (■) B_x , (◆) B_y , (●) B_z . Figure (d) : densité de probabilité centrée et réduite de B_x . Figure (e) : densité de probabilité centrée et réduite de B_y . Figure (f) : densité de probabilité centrée et réduite de B_z . Les trois courbes correspondent à $R_m = 14$ (:), 20 (- -), et 27 (-).

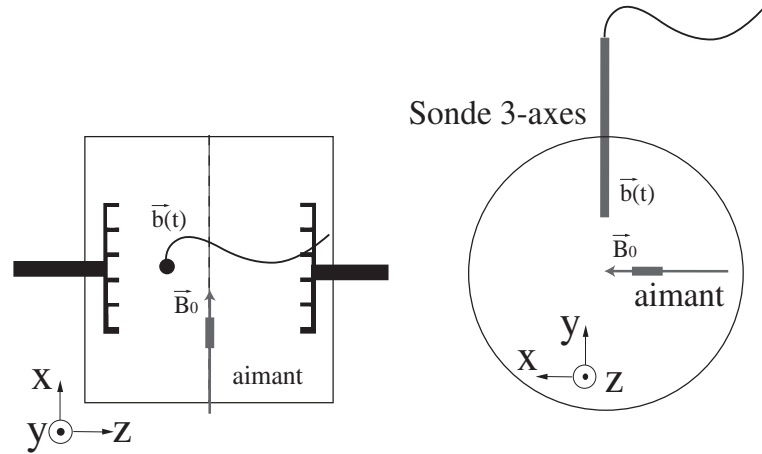


Fig. VII.10: Configuration de champ localisé. La sonde à effet Hall est disposée parallèlement à l'axe Oy dans un plan décalé de 11 cm par rapport au plan médian. On enregistre les trois composantes du champ induit à 9.5 cm de l'axe Oz , et l'aimant est placé dans le doigt de gant horizontal situé dans le plan médian. Il permet de produire un champ intense (environ 1000 G), qui décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne. Au point de mesure son amplitude est inférieure à celle du champ terrestre.

Induction moyenne : la figure VII.12 (a) représente l'évolution temporelle de la composante B_x en présence de l'aimant pour une vitesse de rotation $\Omega = 16$ Hz ($R_m \sim 28$). Elle présente une évolution intermittente constituée de bouffées dont l'amplitude typique (3 G) est plus grande que sa valeur moyenne. Ce résultat apparaît plus clairement lorsqu'on compare les évolutions en fonction de R_m de la valeur moyenne du champ induit en figure VII.12 (b), et de la valeur rms de ses composantes en VII.12 (c). Ces deux figures permettent d'observer la situation inédite que nous rencontrons : pour toutes les valeurs de R_m explorées, et chacune des composantes, nous trouvons que la valeur moyenne est de l'ordre de grandeur du champ terrestre (0.5 G) et qu'elle n'évolue pas avec R_m . En revanche nous trouvons que la valeur rms des signaux est toujours très nettement supérieure à la valeur moyenne, et qu'elle évolue linéairement avec R_m pour atteindre une amplitude de 2 G pour $\Omega = 16$ Hz. En outre, l'amplitude des valeurs rms mesurée ne peut être due au champ localement imposé. En effet, si l'on applique les résultats obtenus en champ homogène à la valeur du champ appliqué (0.3 G), alors nous obtenons que la valeur rms doit être inférieure, à 0.6 G, ce qui est loin de la valeur mesurée.

Ainsi, l'aimant est trop loin pour donner une contribution significative à la valeur moyenne par les mécanismes d'induction classiques. En transportant par intermittence le champ localement localisé jusqu'à la sonde, ce sont donc les fluctuations de l'écoulement qui rendent les valeurs rms des composantes du champ induit si élevées.

Densité spectrale de puissance : les figures VII.11 (a) et (b) montrent les spectres de puissance obtenus respectivement en champ localisé et en champ homogène lorsque les disques tournent à la fréquence $\Omega = 16$ Hz. Dans les deux cas, nous observons que le champ induit possède de l'énergie aux basses fréquences. Toutefois, le spectre en champ localisé apparaît un peu plus bombé que dans le cas d'un champ homogène, et il est assez difficile de trouver un domaine suffisamment large sur lequel on attribuerait un comportement en loi de puissance à ce spectre. Comme dans le cas de VKS2a, nous n'observons

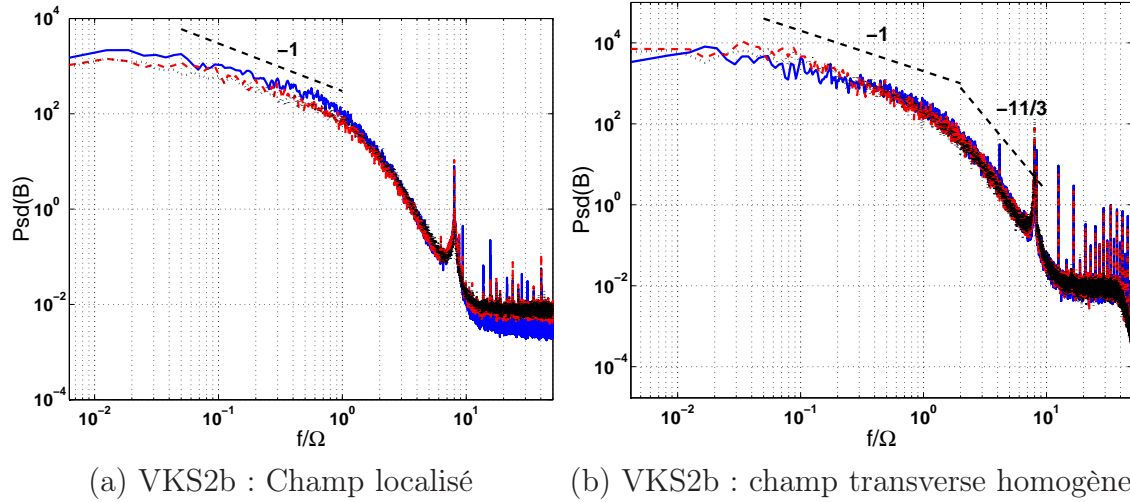


Fig. VII.11: Configuration VKS2b, comparaison des spectres de puissance : Figure (a) : champ localisé, spectre de puissance des trois composantes du champ induit. Figure (b) : champ homogène, densité spectrale de puissance des 3 composantes du champ induit. Ligne tiretée B_x , ligne pointillée B_y , ligne pleine B_z .

pas de loi de puissance d'exposant $-11/3$ à haute fréquence, ce qui peut être à la présence de bulles d'argon que nous n'aurions pas réussi à supprimer.

Description des PDF : nous montrons enfin en figures VII.12 (d), (e) et (f) les PDF centrées et réduites des trois composantes du champ induit. Nous retrouvons ici quantitativement le résultat qualitatif que nous avons extrait de l'évolution temporelle de B_x . Les PDF tracées en coordonnées semi-logarithmiques montrent nettement que les trois composantes du champ induit sont intermittentes puisque la loi de probabilité des fluctuations décroît linéairement dès lors qu'on s'écarte de la valeur la plus probable. Nous observons de plus que les PDF des acquisitions faites pour différentes vitesses se superposent une fois centrées et réduites.

Conclusion : en rendant les effets d'induction moyens négligeables devant les fluctuations, l'utilisation du champ localisé a permis de mettre clairement en évidence la dynamique intermittente du champ induit. Toutefois, nous ne connaissons pas l'origine de cette intermittence, et il faudra faire d'autres mesures pour espérer la comprendre. Nous insistons ici sur le caractère préliminaire des quelques mesures exposées. Elles sont extraites d'un ensemble plus vaste d'acquisitions, qui ont été faites à la fois avec la sonde 3-axes du gaussmètre, mais aussi avec une sonde multiple spécialement conçue au laboratoire. Cette dernière, qui permet d'enregistrer les trois composantes du champ induit en dix points repartis le long d'un rayon, a livré ses premiers résultats. Ils sont en cours d'analyse et seront bientôt comparés avec ceux obtenus dans le gallium.

VII.4 Bilan des mesures dans le sodium

Lors des deux campagnes de mesure effectuées à Cadarache, il nous a été possible d'interpréter qualitativement les mesures de champ magnétique induit à l'aide des résultats

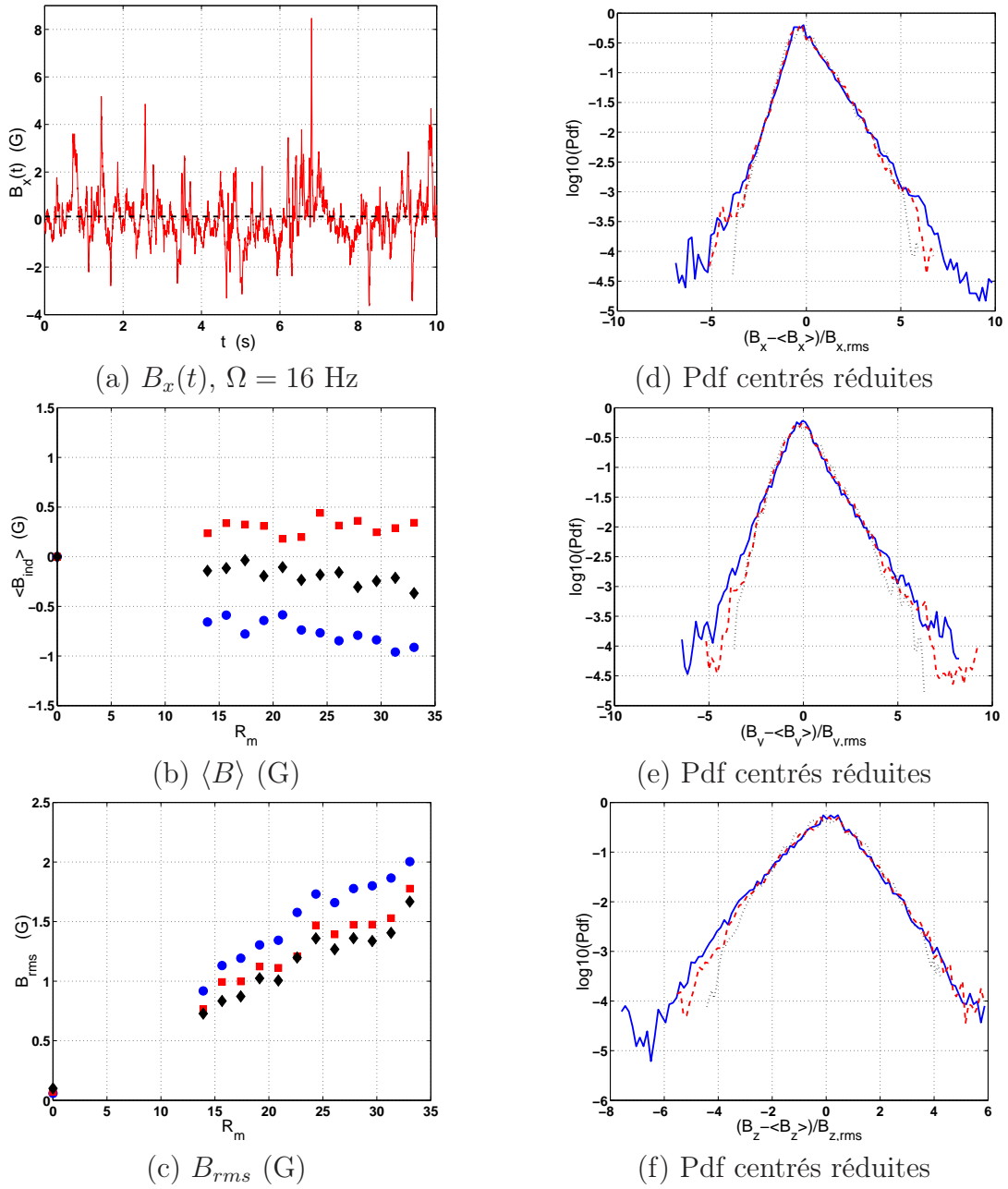


Fig. VII.12: Configuration VKS2b, effet d'un champ intense localisé : Figure (a) : évolution temporelle de B_x pour $\Omega = 16$ Hz ($R_m = 27$). Figures (b) et (c) : valeurs moyennes et valeurs rms en fonction de R_m . Conventions : (■) B_x , (◆) B_y , (●) B_z . Figure (d) : densité de probabilité centrée et réduite de B_x . Figure (e) : densité de probabilité centrée et réduite de B_y . Figure (f) : densité de probabilité centrée et réduite de B_z . Les trois courbes correspondent à $R_m = 14$ (:), 20 (- -), et 27 (-).

obtenus par l'équipe VKS1. Il est apparu que le dispositif VKS2a montre une amplification du champ magnétique plus importante ce qu'avait montré VKS1, avec notamment un bouclage cinq fois plus efficace de la composante transverse. Malgré cette intense amplification, nous n'avons pas pu observer l'instabilité dynamo à des fréquences de rotation pourtant plus grandes que la valeur seuil numériquement prévue. Toutefois nous avons aussi observé que ni la simulation itérative, ni le code temporel de Saclay ne sont en mesure de reproduire l'évolution linéaire des mesures expérimentales en fonction de R_m . Il paraît dès lors moins surprenant que le code cinématique, qui ne prend pas en compte la dynamique de l'écoulement, ne soit pas en mesure de prédire avec précision le seuil de l'instabilité.

Les résultats préliminaires obtenus dans les deux configurations d'étude nous ont permis de mettre clairement en évidence la dynamique intermittente de la composante B_x du champ induit dans le régime $R_m \geq 15$. Ces résultats tranchent notablement avec ceux obtenus pour $R_m \leq 5$, qui avaient montré des fluctuations gaussiennes pour le champ induit. Toutefois, il est difficile pour l'instant de savoir si cette intermittence est un effet du R_m , qui introduit un mélange des effets d'induction, ou un effet de taille du système, qui fait que les instationnarités de l'écoulement sont plus rapides que le temps de décroissance du champ magnétique. L'analyse des résultats obtenus dans le sodium avec la nouvelle sonde multiple, couplée à une étude en champ localisé dans le gallium, permettra sans doute d'apporter un élément de réponse.

Troisième partie : Étude numérique de l'effet
dynamo dans un écoulement structuré en
colonnes.

Chapitre VIII

Mécanismes d'induction dans un écoulement structuré en colonnes

VIII.1 Motivations

Même si aujourd'hui la communauté scientifique s'accorde quant à la génération du champ magnétique terrestre par effet dynamo dans le noyau externe de la Terre, la question reste ouverte quant aux mécanismes d'induction responsables de l'apparition de l'instabilité. Et pour cause, l'écoulement de convection du fer liquide dans le noyau, qu'il soit d'origine thermique ou compositionnelle, est lui même mal connu.

Il a été montré tant numériquement qu'expérimentalement depuis les travaux de Busse et Carrigan [23, 24]) qu'un écoulement de convection en rotation rapide se bidimensionnalise et se structure en colonnes sous l'effet de la force de Coriolis (figure VIII.1).

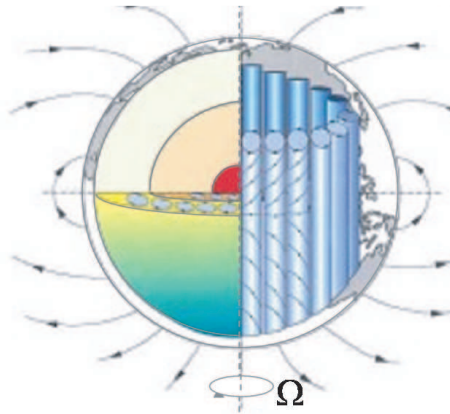


Fig. VIII.1: Représentation schématique des colonnes de Busse dans le noyau de la Terre

Si ces écoulements sont complexes, on en connaît tout de même les caractéristiques principales. Au-delà du seuil de convection, mais dans le régime faiblement non linéaire, les colonnes s'organisent en une alternance de cyclones et d'anticyclones dans un cylindre tangent à la graine. L'écoulement n'est pas stationnaire ; c'est une onde de Rossby thermique qui dérive dans le sens prograde. Sous l'effet des forces visqueuses qui dominent près des parois et d'un effet de pente (l'effet β , qui n'a rien à voir avec la turbulence), la contrainte de bidimensionnalité se relâche et une vitesse axiale appelée pompage apparaît, l'écoulement est alors quasi-géostrophique et il présente (au moins dans le cas du

pompage d'Ekman) l'aspect en hélices alternées que l'on observe en figure VIII.1. Comme cette vitesse verticale est symétrique par rapport au plan équatorial, le signe de l'hélicité se renverse dans chaque hémisphère. Elle est négative dans l'hémisphère nord, positive dans l'hémisphère sud et sa moyenne sur l'ensemble de l'écoulement est nulle. Aubert et Gillet [2, 3] ont montré que lorsque l'on atteint le régime non linéaire, la symétrie cyclones/anticyclones se brise (les anticyclones restant situés près de la graine) et qu'il apparaît un écoulement axisymétrique avec cisaillement radial appelé vent zonal.

Appliqué au noyau de la terre, cet ensemble de résultats fournit plusieurs scénarii possibles (α^2 ou $\alpha - \Omega$) pour la production du champ magnétique terrestre par effet dynamo. Que doit-on alors retenir comme ingrédients essentiels si l'on veut construire un écoulement modèle simple permettant d'étudier et de comprendre les mécanismes d'induction dans un tel système ?

Une première possibilité, la plus simple, consiste en l'écoulement étudié par G.O. Roberts [88], que nous écrivons en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\mathbf{V} = V_0 \begin{pmatrix} \sin(ky) \\ \sin(kx) \\ \cos(kx) - \cos(ky) \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.1})$$

Comme le montre la figure VIII.2, il possède une structure périodique organisée en une alternance de colonnes contrarotatives et l'hélicité de toutes les colonnes est de même signe puisque la vitesse verticale, maximale au cœur des vortex se renverse d'une colonne à l'autre.

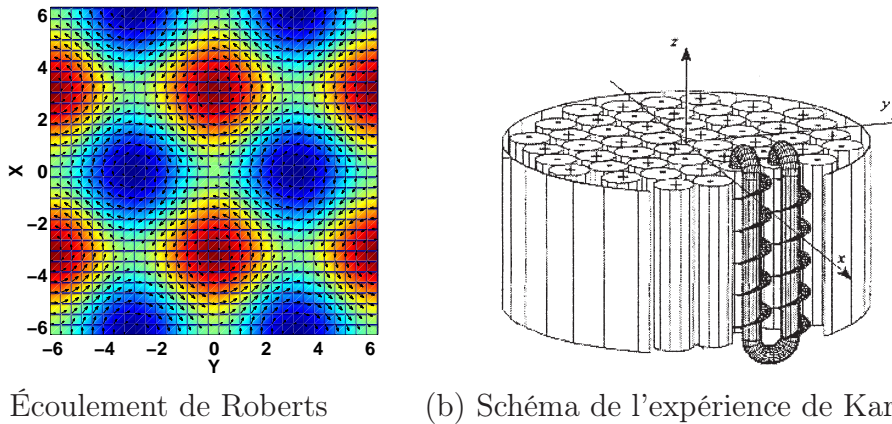


Fig. VIII.2: Figure (a) : champ de vitesse de l'écoulement de Roberts. La vitesse verticale, qui est en phase avec la vorticité de chaque colonne, se renverse d'une colonne à l'autre de sorte que l'ensemble du système possède une hélicité moyenne non nulle. Figure (b) : représentation schématique de la structure en colonnes de l'écoulement utilisé pour l'expérience dynamo de Karlsruhe.

Malheureusement si cet écoulement bidimensionnel est capable d'entretenir un champ magnétique par effet dynamo (Roberts, 1972), puisqu'il est à l'origine de l'écoulement utilisé par l'expérience de Karlsruhe [101] (figure VIII.2 (b)), il conduit toutefois conformément à la théorie de champ moyen, à une dynamo α^2 , dont le champ magnétique est perpendiculaire aux colonnes. La structure du mode obtenu est donc plutôt de type dipôle équatorial, et ce système peut difficilement expliquer l'entretien du champ dipolaire

quasi axisymétrique qui nous indique le nord. Pour comprendre quel est le lien entre la structure et la génération du dipôle axial, nous avons alors imaginé un champ de vitesse stationnaire, structuré en une alternance de vortex contrarotatifs répartis dans une couronne cylindrique, ce qui est plus conforme à l'image classique des colonnes de Busse. Les diverses études de l'écoulement de Roberts ayant montré qu'un tel champ de vitesse stationnaire ne donne pas d'effet α lorsque pompage et vorticité sont en quadrature [45], nous avons utilisé un pompage axial possédant deux propriétés essentielles : il est en phase avec la vorticité de chaque colonne, se renverse d'une colonne à l'autre et il est symétrique par rapport au plan médian. Nous en donnons une représentation schématique en figure VIII.3.

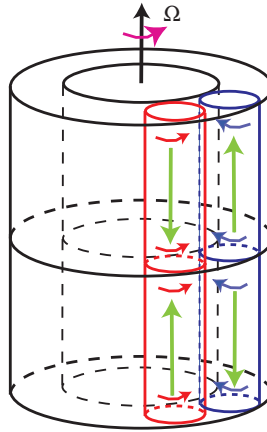


Fig. VIII.3: Écoulement modèle pour la terre. Les rouleaux sont répartis dans une couronne et le pompage axial se renverse d'un hémisphère à l'autre.

L'écoulement ainsi produit est comparable à celui utilisé par Avalos et collaborateurs [7, 8] qui ont montré, dans le cadre de la théorie de champ moyen au premier ordre, la possibilité d'observer un effet α dans le cas où l'écoulement n'est pas localisé dans un espace borné, mais est soit invariant par translation selon z , soit une fonction périodique de la coordonnée verticale.

Notre écoulement reproduit donc de manière simple (voir simpliste) l'image des colonnes de Busse, puisqu'il ignore le caractère ondulatoire de l'écoulement d'une part, et qu'il ne prend pas en compte la présence du vent zonal d'autre part. Ne présentant pas de cisaillement radial permettant d'effectuer la conversion d'un champ poloïdal en un champ toroïdal par effet Ω , le modèle ainsi construit ne pourra prétendre modéliser une dynamo de type $\alpha - \Omega$ comme celle entretenue par l'écoulement de Couette sphérique étudié par Schaeffer *et al* [90, 91]. Toutefois sa structure annulaire nous permettra d'étudier l'impact d'une séparation d'échelle sur les mécanismes d'induction. Nous observerons qu'elle ne renforce pas ces derniers mais donne un moyen efficace de lutter contre l'expulsion.

Pour étudier les mécanismes d'induction et ainsi la possibilité de bouclage dynamo avec l'écoulement synthétique, nous avons suivi la même démarche que pour les expériences d'induction. Nous appliquons successivement un champ magnétique axisymétrique toroïdal dans un premier temps puis poloïdal dans un second temps, et étudions les mécanismes d'induction permettant à ces deux champs de s'entretenir l'un l'autre. Pour cela nous résolvons à l'aide de la procédure itérative l'équation d'induction stationnaire qui s'écrit

une fois adimensionnée :

$$\Delta \mathbf{B} + \mathbf{R}_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{R}_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{VIII.2})$$

Notre méthode numérique trouve ici tout son intérêt puisqu'elle permet de travailler avec un écoulement confiné dans un volume compact avec des conditions limites réalistes. Elle permettra de plus d'envisager la possibilité, dans un second temps, d'un bouclage du cycle dynamo entre les composantes toroïdale et poloïdale d'un champ magnétique dipolaire ou quadrupolaire. Cet aspect sera présenté au chapitre suivant, ce chapitre restant consacré à l'étude détaillée des mécanismes d'induction.

VIII.2 Écoulement modèle

L'écoulement supposé stationnaire et organisé autour d'une graine conductrice est constitué de $2n$ colonnes, soit n paires de cyclones et d'anticyclones appariés qui se répartissent dans une coquille cylindrique. Dans chaque colonne le pompage, composante verticale de la vitesse, se renverse de telle sorte que l'hélicité contenue dans chaque colonne est de même signe. L'ensemble du fluide est contenu dans un cylindre fermé de hauteur ($H = 2$) et de rayon $R = 1$. Pour pouvoir facilement faire varier les différents paramètres, nous avons exprimé le champ de vitesse comme une somme de deux contributions distinctes : la première constitue le mouvement de rotation dans chaque colonne (nommée \mathbf{V}^R), et la seconde constitue le pompage axial que l'on nomme \mathbf{V}^A . Chacune des contributions est alors choisie de manière à être séparément à divergence nulle, et la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}^R + P\mathbf{V}^A, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^R &= \nabla \cdot \mathbf{V}^A = 0, \end{aligned}$$

le paramètre ajustable P quantifiant l'intensité du pompage axial par rapport à la rotation dans une colonne.

Composante de rotation : pour simuler le comportement quasi-géostrophique de l'écoulement, la partie \mathbf{V}^R est indépendante de l'altitude. Ainsi notant $e = d/R$ l'épaisseur relative de la couronne dans laquelle l'écoulement est confiné (entre les rayons $r = 1 - e$ et $r = 1$), la composante de rotation \mathbf{V}^R s'écrit en coordonnées cylindriques adimensionnées ($r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]$) :

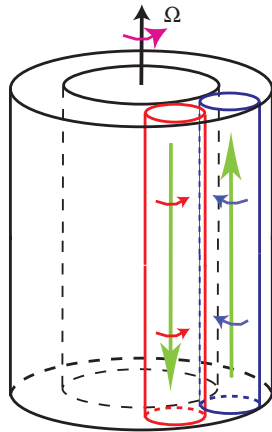
$$\mathbf{V}^R \begin{cases} V_r^R(r, \theta) = \sin(n\theta) \cdot \sin[\pi(r - (1 - e))], \text{ pour } r \in [1 - e, 1] \\ V_\theta^R(r, \theta) = \frac{\pi}{ne} \cos(n\theta) \cdot \{r \cos[\pi(r - (1 - e))] + \dots \\ \dots + e \sin[\pi(r - (1 - e))]\}, \text{ pour } r \in [1 - e, 1] \\ V_z^R(r, \theta) = 0, \text{ pour } r \in [0, 1] \end{cases} \quad (\text{VIII.3})$$

En dehors de cette couronne, pour $r \in [0, \leq 1 - e]$, la vitesse est nulle et l'origine du repère a été prise au centre du cylindre.

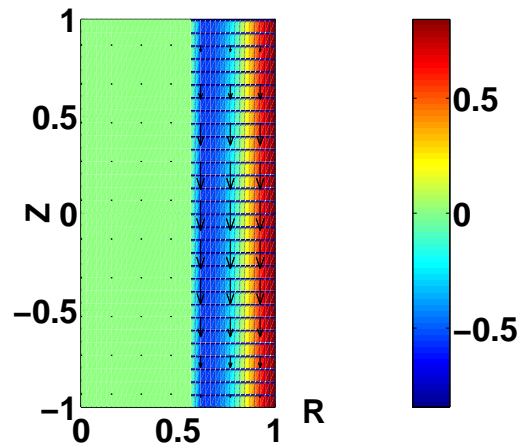
i) **Pompage axial** : pour le pompage axial, nous avons considéré deux cas : dans le premier cas, que l'on nomme \mathbf{T}_2^1 , le pompage n'est pas antisymétrique par rapport au plan $z = 0$, mais ressemble à celui que l'on obtiendrait en ne s'intéressant qu'à un seul des deux hémisphères terrestres. Le champ de vitesse correspondant s'écrit pour $r \in [1 - e, 1]$ et $z \in [-1, 1]$:

$$\mathbf{V}^A \begin{cases} V_r^A(r, \theta) = 0 \\ V_\theta^A(r, \theta) = \frac{\pi r}{2n} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \\ V_z^A(r, \theta) = \cos(n\theta) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \end{cases} \quad (\text{VIII.4})$$

Puisque le mouvement du fluide est contraint dans un cylindre fermé, la vitesse \mathbf{V}^A doit respecter la condition d'imperméabilité des parois. Celle-ci se résume dans le cas présent à la nullité de V_z^A en $z = \pm 1$. Nous avons choisi de faire recirculer le fluide d'une colonne à l'autre dans la direction orthoradiale, ce qui se traduit par la présence de la composante V_θ^A . Cet écoulement possède donc une hélicité moyenne non nulle puisque l'hélicité contenue dans chaque rouleau est de même signe. Par convention, la vitesse axiale V_z^A est négative dans les rouleaux de vorticité ω_z positive (figure VIII.4), donnant ainsi une hélicité négative. L'hémisphère représenté est donc la partie Nord du noyau terrestre.



(a)  coulement \mathbf{T}_2^1



(b) Vue en coupe dans le plan $\theta = 0$

Fig. VIII.4 : Figure (a) : représentation schématique de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 . Figure (b) : coupe du champ de vitesse dans le plan $\theta = 0$. Flèches (\rightarrow), composantes radiale V_r et axiale V_z . Couleurs, isovaleurs de la composante orthoradiale V_θ . La composante de rotation n'est non nulle qu'entre les rayons $r = 0,6$ et $r = 1$ et le pompage V_z^A est une fonction paire de la coordonnée verticale.

ii) ** coulement \mathbf{T}_1** : dans le second cas appelé \mathbf{T}_1 , le pompage présente les mêmes symétries que les colonnes de Busse en convection tournante, il se renverse par rapport au plan $z = 0$ et s'écrit $r \in [1 - e, 1]$ et $z \in [-1, 1]$:

$$\mathbf{V}^A \begin{cases} V_r^A(r, \theta) = 0 \\ V_\theta^A(r, \theta) = -\frac{\pi r}{n} \sin(n\theta) \cos(\pi z) \\ V_z^A(r, \theta) = \cos(n\theta) \sin(\pi z) \end{cases} \quad (\text{VIII.5})$$

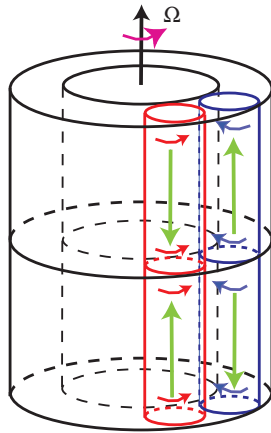
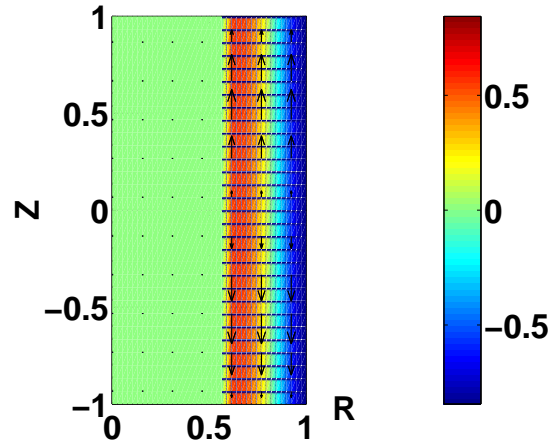

(a) Écoulement T_1

(b) Coupe dans le plan $\theta = 0$

Fig. VIII.5: Figure (a) : représentation schématique de l'écoulement T_1 . Figure (b) : coupe du champ de vitesse dans le plan $\theta = 0$. Flèches (\rightarrow), composantes radiale V_r et axiale V_z . Couleurs, isovaleurs de la composante orthoradiale V_θ .

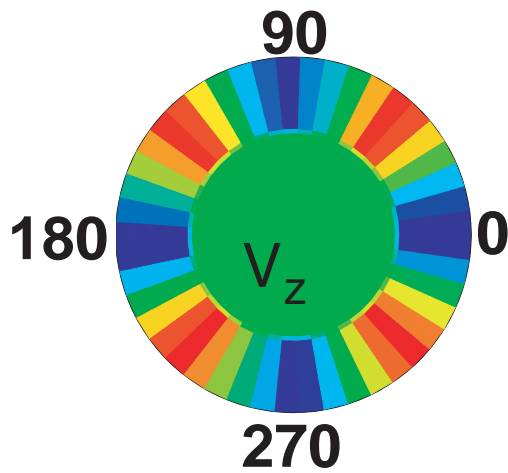
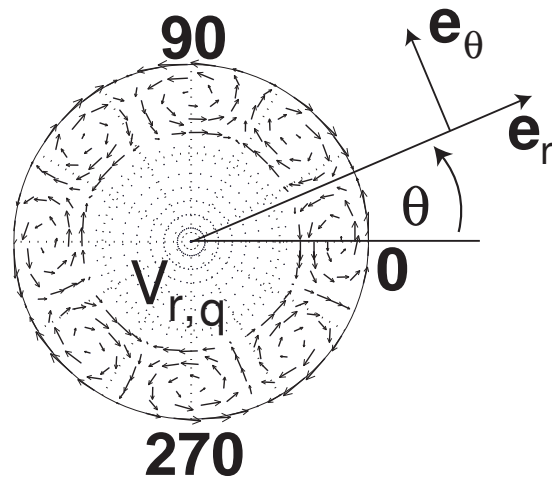

(a) V_z^A

(b) (V_r, V_θ)

Fig. VIII.6: Vue en coupe dans le plan $z = 0$ de l'écoulement T_2^1 possédant 4 paires de colonnes. Figure (a) : isovaleurs de la composante verticale V_z^A . La couleur rouge correspond à une vitesse verticale ascendante $V_z^A > 0$. Figure (b) : composantes radiale et orthoradiale de la vitesse. Nous avons représenté les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ des coordonnées cylindriques qui définissent la convention d'orientation des angles.

La figure VIII.5 montre que la vitesse axiale V_z^A est une fonction impaire de z . Les hélicités moyennes de chaque hémisphère se compensent ($\mathcal{H} < 0$ pour $z > 0$ et $\mathcal{H} > 0$ pour $z < 0$) pour donner une hélicité globale nulle.

Une fois qu'on a fixé l'échelle de taille du cylindre $R = 1$, et le rapport d'aspect du cylindre $H/R = 2$, le nombre de paramètres que l'on peut faire varier (tels que le nombre de colonnes n , leur rapport d'aspect d/R , l'intensité du pompage par rapport à celle de la rotation et enfin nombre de Reynolds magnétique R_m) est encore grand. Nous avons donc choisi de nous concentrer sur le cas particulier présenté en figure VIII.6. Il est constitué de quatre paires de colonnes d'épaisseur relative $e = 0.4$. Le paramètre P a été pris égal à 1, 25 ce qui donne un rapport entre rotation et pompage $\mathcal{R} = \max(\mathbf{V}^R)/\max(\mathbf{V}^A) = 1.4$. Une fois fixée la géométrie du problème, le seul paramètre que nous puissions faire varier est le nombre de Reynolds magnétique $R_m = V_{\max}R/\lambda$. Ceci peut être fait a posteriori puisque le schéma itératif résout la hiérarchie d'équations de Poisson pour $R_m = 1$ (soit pour $V_{\max} = 1$ et $\lambda = 1$) et que l'évolution en R_m du champ est obtenue par somme de la série entière $\mathbf{B}_{ind} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k(R_m = 1)R_m^k$.

VIII.3 Mécanismes d'induction pour l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$

VIII.3.1 Champ toroïdal appliqué

Puisque le long de la coordonnée azimutale, l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ présente une structure analogue à celle de l'écoulement de Roberts, l'application d'un champ perpendiculaire aux colonnes, dans la direction orthoradiale, doit alors permettre de générer, par effet α , un courant électrique parallèle au champ appliqué. Pour des raisons qui apparaîtront dans la partie traitant d'un champ radial appliqué, le champ orthoradial que nous appliquons aux colonnes n'est pas uniforme le long d'un rayon mais décroît comme l'inverse de la coordonnée radiale. Ce champ divergeant en $r = 0$, nous lui imposons d'être une fonction linéaire au centre du cylindre, $r \leq 0,05$.

$$\mathbf{B}_0 = \begin{cases} B_0 \frac{r}{a} \mathbf{e}_{\theta}, & r \leq a \\ B_0 \frac{a}{r} \mathbf{e}_{\theta}, & r \geq a \end{cases} \quad (\text{VIII.6})$$

\mathbf{B}_0 est donc le champ créé par un barreau infini de rayon a parcouru par un courant vertical et uniformément réparti dans le barreau. Son amplitude maximale est égale à 1 et son amplitude dans la colonne, celle qui est importante pour comparer champ appliqué et champ induit, est égale à 0,25.

VIII.3.1.1 Réponse à l'ordre 1

La figure VIII.7 montre une coupe dans le plan $z = 0$ du champ magnétique obtenu à l'ordre 1 dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$. Nous pouvons observer que le champ induit possède une structure analogue à celle de l'écoulement, à ceci près que le champ induit apparaît en quadrature avec le champ de vitesse. Pour comprendre ce résultat, analysons l'équation dont est solution \mathbf{B}_1 . Elle s'écrit :

$$\Delta \mathbf{B}_1 = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (\text{VIII.7})$$

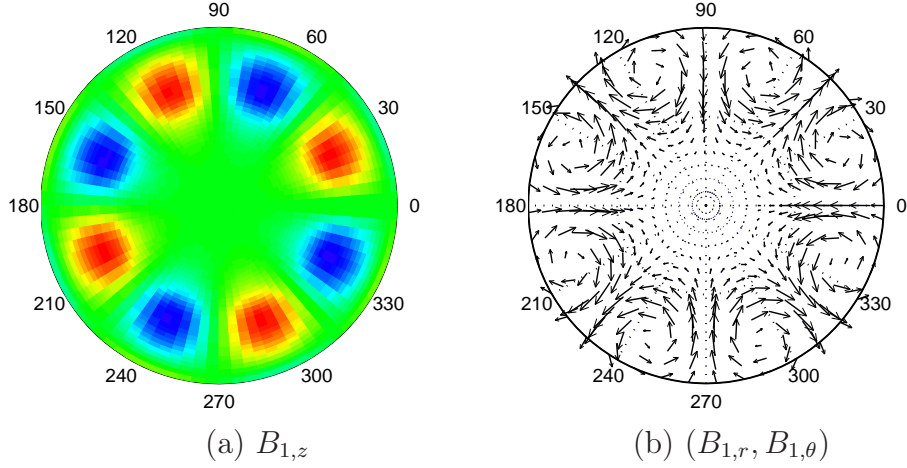


Fig. VIII.7: Champ induit à l'ordre 1 dans le plan $z = 0$. Figure (a) : composante verticale $B_{1,z}$. La couleur rouge correspond à $B_{1,z} > 0$. Figure (b) : composantes radiale $B_{1,r}$ et orthoradiale $B_{1,\theta}$ du champ magnétique induit.

Comme le champ appliqué \mathbf{B}_0 et l'écoulement sont tous deux à divergence nulle, cette équation peut-être réécrite en faisant apparaître les termes de déformation et de transport du champ appliqué. On obtient alors :

$$\Delta \mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}_0. \quad (\text{VIII.8})$$

Champ axial induit : puisque la composante de rotation \mathbf{V}^R , ne possède pas de composante axiale, la projection de l'équation précédente sur l'axe \mathbf{e}_z se réduit à :

$$\Delta B_{1,z} = -B_0 \frac{a}{r} \partial_\theta V_z^A. \quad (\text{VIII.9})$$

Le champ induit à l'ordre 1 dans la direction verticale, que nous avons représenté en figure VIII.7 (a), est donc produit par la dérivée selon l'azimut du pompage V_z^A . Nous avons alors vérifié numériquement que, lorsque ce dernier est renversé, le champ induit $B_{1,z}$ est changé en son opposé. Ce résultat se comprend bien en étudiant la figure VIII.8, qui montre qualitativement l'effet d'étirement d'une ligne de champ par le pompage différentiel des colonnes. Au premier ordre, ce dernier produit un champ $B_{1,z}$ localisé entre les colonnes, en quadrature avec la composante de vitesse qui lui donne naissance, comme on le constate en comparant les figures VIII.7 et VIII.6.

Champ radial induit : l'interprétation de la composante horizontale du champ induit \mathbf{B}_1 est plus complexe. En effet, dans le plan $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$, l'équation de Poisson se décompose comme :

$$(\Delta \mathbf{B}_1)_{(r,\theta)} = B_0 \frac{a}{r^2} \partial_\theta \mathbf{V}_{(r,\theta)}^R + \mathbf{V}^R \cdot \nabla \mathbf{B}_0 - B_0 \frac{a}{r^2} \partial_\theta \mathbf{V}_{(r,\theta)}^A + \frac{\mathbf{V}_\theta^A}{r} \partial_\theta \mathbf{B}_0. \quad (\text{VIII.10})$$

Le champ appliqué étant non homogène, plusieurs termes sources venant tant du pompage que de la rotation peuvent donc créer le champ induit. Toutefois, la composante azimutale V_θ^A étant une fonction impaire de z , les deux derniers termes sources de l'équation ne

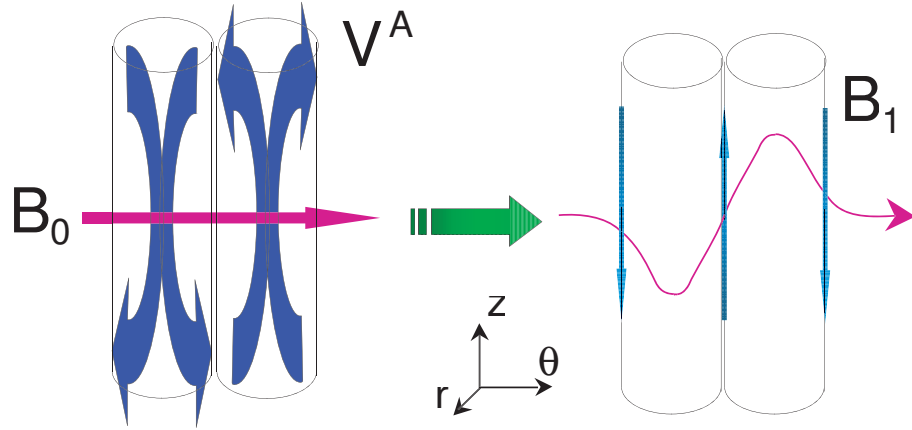


Fig. VIII.8: Effet d'étirement d'une ligne de champ azimuthale par le pompage axial dans une paire de colonnes. Le pompage V_z^A se renversant d'une colonne à l'autre, une ligne de champ orthoradiale est étirée vers le bas dans la colonne de gauche et vers le haut dans la colonne de droite. Le résultat est donc la superposition du champ initial et d'une composante verticale induite (flèches verticales) localisée entre les colonnes.

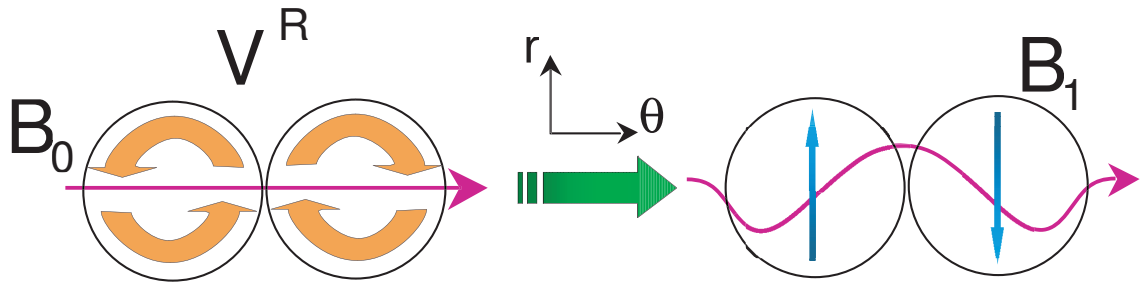


Fig. VIII.9: Distortion d'une ligne de champ azimuthale par la vitesse radiale dans une paire de colonne. La ligne de champ orthoradiale est entraînée par la vitesse radiale, ce qui provoque l'apparition d'une composante $B_{1,r}$ localisée au centre des colonnes. Elle se renverse d'une colonne à l'autre puisque son signe est donné par le sens, direct ou indirect, de la rotation de chacun des vortex.

peuvent pas, par symétrie, contribuer au champ induit dans le plan $z = 0$. Pour vérifier ce résultat, nous avons renversé le sens de rotation des colonnes. Nous avons alors observé que le champ induit $B_{1,(r,\theta)}$ était changé en son opposé dans le plan médian. Comme le champ radial n'est créé que par l'interaction entre \mathbf{B}_0 et \mathbf{V}^R , nous pouvons alors tenter d'interpréter simplement la topologie du champ $B_{1,r}$ que l'on observe en figure VIII.7 (b). Pour cela, projetons la restriction au plan $z = 0$ de l'équation précédente sur \mathbf{e}_r . Les termes venant du pompage ayant disparu, on obtient l'équation :

$$(\Delta \mathbf{B}_1)_r = B_0 \frac{a}{r^2} (\partial_\theta V_r^R - V_\theta^R) + \frac{V_\theta^R}{r} B_0 \frac{a}{r}, \quad (\text{VIII.11})$$

qui montre que l'étirement des lignes de champ par le gradient de V_θ^R est compensé par l'advection du gradient azimuthal de \mathbf{B}_0 . Il ne reste alors que le premier terme source :

$$(\Delta \mathbf{B}_1)_r = B_0 \frac{a}{r^2} \partial_\theta V_r^R, \quad (\text{VIII.12})$$

qui décrit la déformation d'une ligne de champ orthoradiale par les gradients de la vitesse radiale. Ce résultat est illustré par la figure VIII.9 :

Nous retrouvons ici le résultat important que nous avons déjà observé au chapitre IV lors de l'étude des effets d'induction dans les écoulements de gallium. Au premier ordre, un écoulement de rotation agit sur un champ transverse en induisant, au milieu du vortex, une composante perpendiculaire au champ appliqué, et dont l'angle $\pm 90^\circ$ est donné par le sens de la rotation. Ce résultat général nous permettra d'interpréter facilement les mécanismes d'expulsion par l'anneau de vortex du champ appliqué.

VIII.3.1.2 Réponse à l'ordre 2

Puisque la moyenne azimuthale de la vitesse $\langle \mathbf{V} \rangle_\theta$ est nulle, et que le champ appliqué possède la symétrie de révolution, la moyenne azimuthale du champ induit $\langle \mathbf{B}_1 \rangle_\theta$ est nulle. Pour obtenir la conversion du champ appliqué toroïdal invariant par rotation en un champ axisymétrique poloïdal, il faut donc aller à l'ordre suivant. En effet, si l'on observe la figure VIII.10, on constate que la force électromotrice $\mathbf{e}_2 = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1$ possède une composante axisymétrique non nulle, signe d'un mécanisme d'induction coopératif des colonnes.

Le courant électrique \mathbf{J}_2 correspondant possède une forte composante toroïdale, parallèle au champ appliqué et organisé en une boucle de courant. Il est donc source d'un champ magnétique $\mathbf{B}_{2,z}$ axial ne se renversant pas d'une colonne à l'autre comme c'était le cas pour \mathbf{B}_1 mais changeant de signe de part et d'autre de la couronne comme on le voit sur la figure VIII.11 (a).

Effet de l'hélicité : nous avons observé que le courant orthoradial $J_{2,\theta}$, possède les symétries de l'hélicité dans un renversement des composantes \mathbf{V}^R et \mathbf{V}^A . En effet, il se renverse lorsqu'une seule des deux composantes est changée en son opposée, mais ne varie pas dans un changement $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$. Comme le montre la figure VIII.12, l'existence de ce courant toroïdal s'explique parfaitement en suivant la phénoménologie de l'effet α , qui donne un courant parallèle au champ appliqué mais de sens opposé au signe de l'hélicité $\mathbf{J}_2 \propto -\mathcal{H}\mathbf{B}_0$.

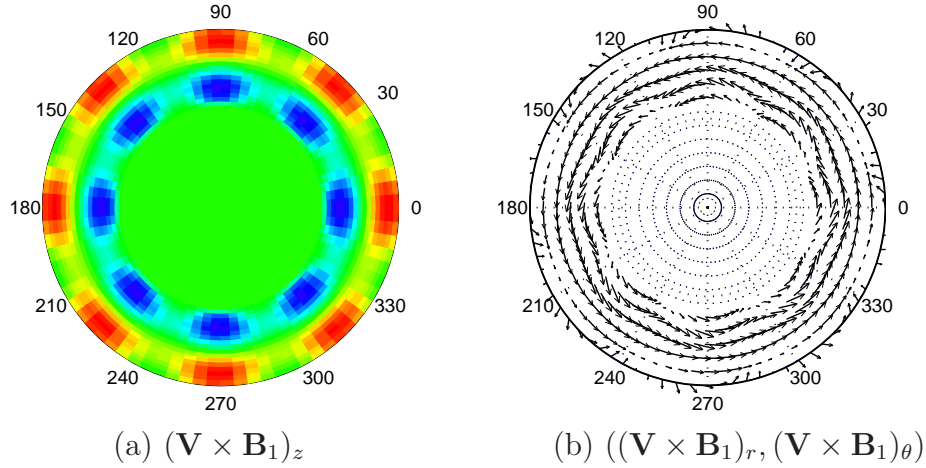


Fig. VIII.10: Coupe dans le plan $z = 0$ de la force électromotrice $\mathbf{e}_2 = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1$ source du champ magnétique \mathbf{B}_2 .

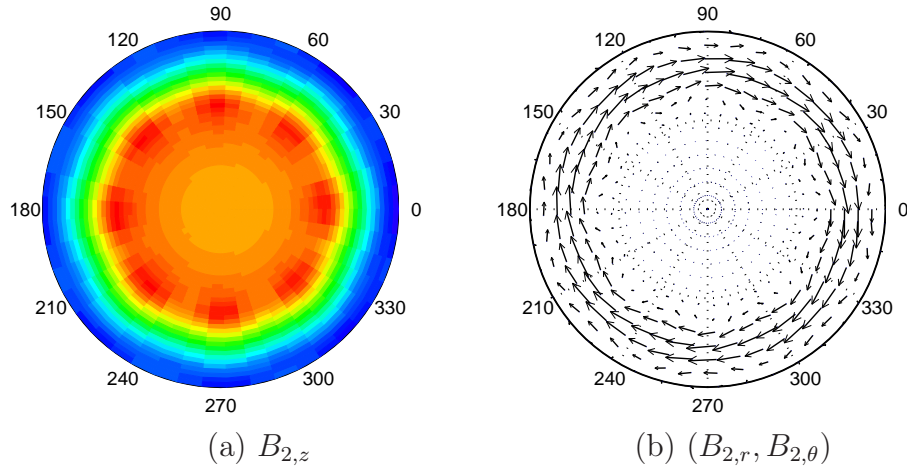


Fig. VIII.11: Coupe dans le plan $z = 0$ du champ magnétique \mathbf{B}_2 . Figure (a) : composante verticale. Figure (b) : composantes radiale et azimutale.

Remarque : ce résultat est cohérent avec l'effet α présent dans les écoulements de Roberts [88] d'une part, et d'Avalos et Plunian d'autre part [7].

Effet de la rotation On peut observer sur la figure VIII.11 que le champ magnétique à l'ordre 2 possède en plus de sa composante dipolaire, une composante toroïdale, majoritairement axisymétrique, localisée dans les colonnes. Cette composante orthoradiale est négative (dirigée selon $-\mathbf{e}_\theta$), donc opposée au champ magnétique appliqué, et doit être associée à la composante verticale du courant électrique $J_{2,z}$. Ce champ induit $\mathbf{B}_{2,\theta}$ reste opposé au champ appliqué que l'on renverse la rotation, le pompage, ou encore que l'on supprime ce dernier. Son origine se trouve donc dans l'action de la composante de rotation des colonnes. Il s'agit de l'effet d'expulsion d'un champ magnétique transverse par un vortex qui a été étudié tant numériquement [106] qu'expérimentalement [72], et a été identifié comme un mécanisme d'ordre 2 [15].

Son mode d'action peut-être assez facilement compris à l'aide de la figure VIII.9. Celle-ci montre qu'à l'ordre 1, la composante de rotation agit sur le champ orthoradial en indui-

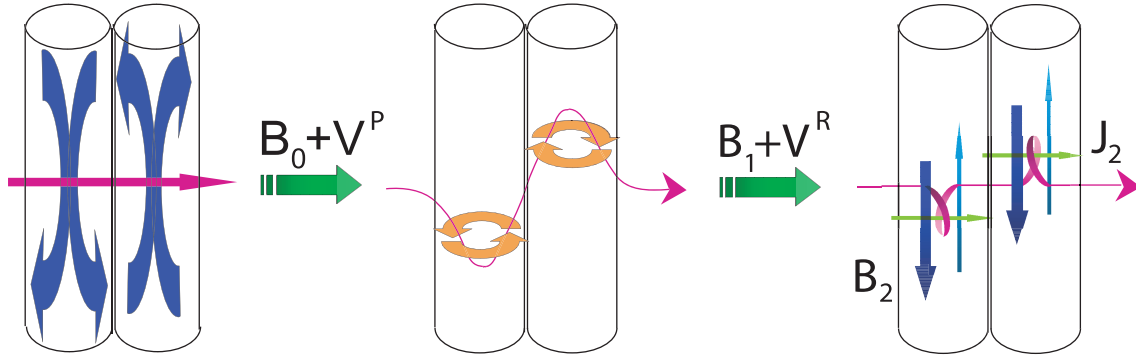


Fig. VIII.12: Schéma d'ordre 2 illustrant l'effet α dans une paire de colonnes.

Une ligne de champ initialement orthoradiale est étirée dans un premier temps par le pompage pour donner le champ induit \mathbf{B}_1 qui se superpose au champ appliqué. Elle est ensuite tordue par la rotation d'un angle de $\pi/2$ pour donner une boucle de champ $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ correspondant à la génération d'une composante verticale \mathbf{B}_2 se renversant de part et d'autre de la couronne. Cette boucle de champ est associée à un courant électrique $\mathbf{J}_{2,\theta}$ parallèle au champ appliqué et de même sens que celui-ci puisque dans le cas présent l'hélicité de chaque colonne est négative.

sant une composante radiale qui se renverse d'une colonne à l'autre. Au centre de chaque colonne, le champ induit à l'ordre 1 est perpendiculaire au champ transverse \mathbf{B}_0 , et son sens est donné par le sens de la composante de rotation. Pour obtenir le champ induit à l'ordre 2, il suffit d'appliquer le même raisonnement au champ induit \mathbf{B}_1 ainsi obtenu (figure VIII.13). On trouve alors que \mathbf{B}_2 fait un angle π avec le champ initial \mathbf{B}_0 .

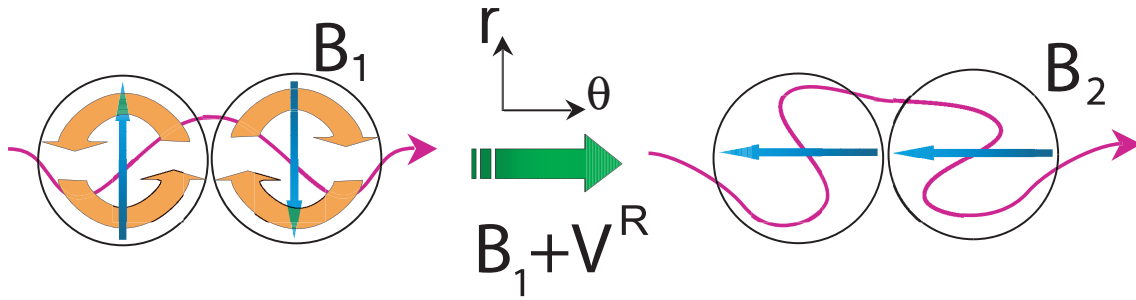


Fig. VIII.13: Schéma d'ordre 2 illustrant l'effet d'expulsion du champ appliqué par une paire de vortex. Une ligne de champ initialement orthoradiale est étirée dans un premier temps par la rotation pour donner le champ induit \mathbf{B}_1 perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . La rotation agit alors sur \mathbf{B}_1 pour induire une composante \mathbf{B}_2 qui est opposée à \mathbf{B}_0 au centre des colonnes.

Comme le montre le dessin de gauche de la figure VIII.12, l'écoulement de recirculation se présente comme une succession de boucles fermées vis-à-vis du champ orthoradial appliqué. On peut donc reprendre les raisonnements des figures VIII.9 et VIII.13 pour décrire l'expulsion du champ azimuthal par l'écoulement \mathbf{V}^P (il suffit de faire le changement $\mathbf{e}_r \rightarrow \mathbf{e}_z$). Ceci montre que les boucles de recirculation de \mathbf{V}^P participent aussi à la production du champ orthoradial axisymétrique opposé au champ appliqué. Nous avons

vérifié numériquement que lorsqu'on supprime la composante de rotation, on observe toujours un champ orthoradial induit à l'ordre 2 qui est opposé au champ appliqué dans les colonnes.

Remarque : nous observons ici que la réponse du système au second ordre ne consiste pas uniquement en l'apparition d'un courant électrique $J_{2,\theta}$ proportionnel au champ appliqué. En effet, nous avons observé que le mécanisme d'expulsion produit lui aussi un courant électrique, mais dans la direction verticale. Si l'on veut décrire les effets d'ordre 2 sous la forme d'un effet collectif, la relation entre le courant \mathbf{J}_2 et le champ appliqué doit donc être une relation tensorielle $\mathbf{J} = \sigma[\alpha]\mathbf{B}$, où $[\alpha]$ est une matrice 3×3 . On constate alors que tous les termes du tenseur $[\alpha]$ ne sont pas le reflet du caractère hélicitaire de l'écoulement, et que certains d'entre eux peuvent être néfastes pour l'entretien d'un champ magnétique par effet dynamo. Dans toute la suite, nous ne nommerons "effet α " que le mécanisme d'induction dû à l'hélicité qui produit un courant parallèle au champ appliqué.

Analyse des champs axisymétriques : l'ensemble des résultats devient plus visible si, au lieu de considérer une coupe dans le plan $z = 0$, on considère la moyenne azimutale des vecteurs :

$$\langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{B}_2(r, \theta, z) \quad (\text{VIII.13})$$

On distingue alors nettement sur les figures VIII.14 (a) et (b), qui représentent deux coupes (r, z) des champ moyennés, le courant toroïdal $\langle J_2^T \rangle$ localisé dans la couronne, et le champ poloïdal dipolaire $\langle \mathbf{B}_2^P \rangle$ qui lui est associé.

Comme l'ont montré Avalos et Plunian [7], lorsque l'écoulement est indépendant de z , le courant électrique \mathbf{J}_2 possède des composantes orthoradiale et axiale, mais sa composante radiale $J_{2,r}$ est nulle. Dans notre cas, l'espace extérieur étant constitué d'isolant, le courant $J_{2,z}$ doit rester confiné dans le conducteur de sorte qu'il reboucle sous forme d'un courant radial $J_{2,r}$ au voisinage de $z = \pm 1$. Le champ orthoradial $\langle \mathbf{B}_2^T \rangle$ qui est associé à ce courant poloïdal est alors localisé dans la couronne. Les mécanismes d'induction que présente ce système résultent donc d'une compétition entre l'effet α , qui est responsable de la conversion du champ toroïdal appliqué en un champ poloïdal (favorable à l'instabilité dynamo), et l'expulsion par les vortex qui s'oppose à la présence d'un champ perpendiculaire aux colonnes. Pour quantifier plus précisément l'importance de ces différents mécanismes, on peut comparer l'amplitude des composantes du champ induit à la valeur du champ appliqué dans les colonnes. La figure VIII.15 (a) montre les profils radiaux et des composantes de $\langle \mathbf{B}_2 \rangle_2$ dans le plan $z = 0$, et la figure VIII.15 (b) montre les profils en fonction de la cote z au centre de la couronne cylindrique ($r = 0.8$). Comme on peut le voir sur la figure (a), l'effet alpha semble être le mécanisme le plus efficace puisque le rapport entre champ axial induit et champ imposé est $B_{2,z}/B_{0,\theta} \sim 37.10^{-4}$ alors que le champ toroïdal induit par expulsion est deux fois plus petit donnant $B_{2,\theta}/B_{0,\theta} \sim 17.10^{-4}$. Nous verrons dans les parties suivantes que ce champ vertical ne participe que très peu au mécanisme d'entretien de la dynamo. C'est le champ radial induit dans la colonne qu'il convient de comparer au champ appliqué. Ce dernier étant plus faible que le champ azimutal puisque $B_{2,r}/B_{0,\theta} \sim 11.10^{-4}$ (figure VIII.15 (b)), lorsque nous allons augmenter R_m , le champ magnétique appliqué va être rapidement expulsé des colonnes.

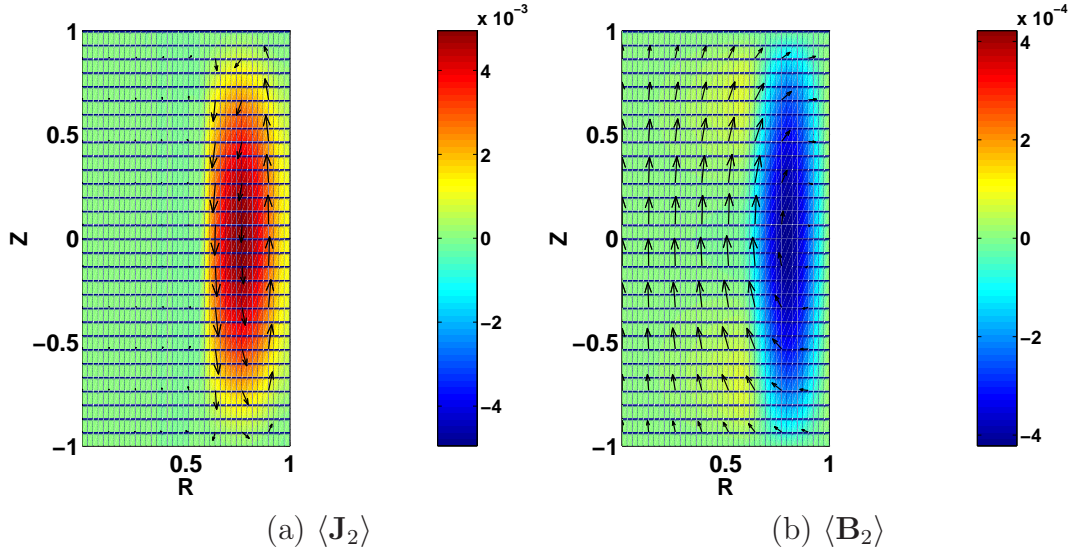


Fig. VIII.14: Coupe dans un plan (r, z) des champs axisymétriques. Figure (a) : courant électrique $\langle \mathbf{J}_2(r, z) \rangle_\theta$. Figure (b) : champ magnétique associé $\langle \mathbf{B}_2(r, z) \rangle_\theta$. La partie poloi-dale des vecteurs est représentée par des flèches alors que les isovalues de partie toroïdale apparaissent en couleurs.

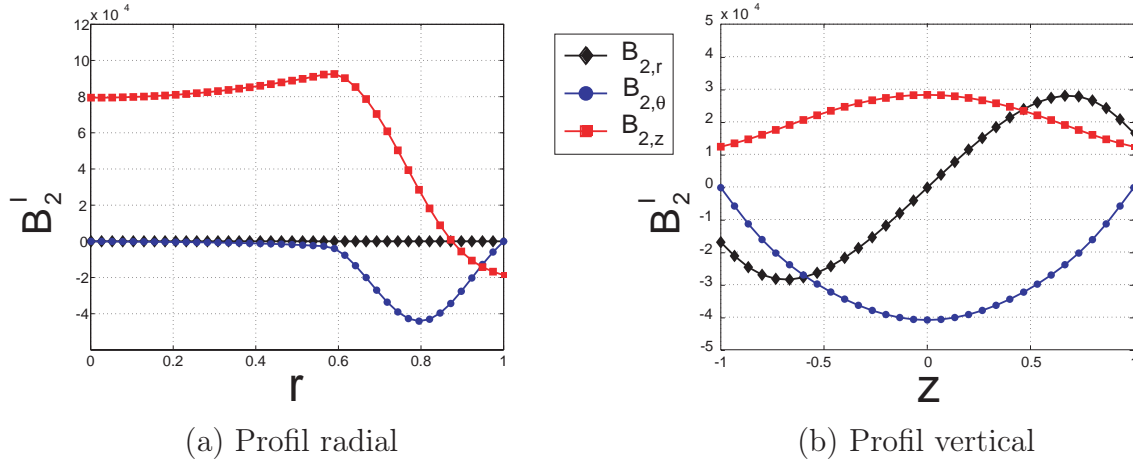


Fig. VIII.15: Profils du champ magnétique $\langle \mathbf{B}_2 \rangle$ obtenu dans le cas d'un champ ortho-radial appliqué d'amplitude $B_{0,\theta} = 0.25$ au centre des colonnes. Figure (a) : profils des trois composantes du champ induit dans le plan $z = 0$ en fonction de la distance à l'axe Oz . Figure (b) : profils des trois composantes du champ induit en fonction de z , pour une distance à l'axe $r = 0.8$ (centre des colonnes). (\blacklozenge) $\langle B_{2,r} \rangle$, (\bullet) $\langle B_{2,\theta} \rangle$ et (\blacksquare) $\langle B_{2,z} \rangle$

VIII.3.1.3 Calcul aux ordres supérieurs

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, l'effet α assure la conversion du champ toroïdal appliqué en une composante poloïdale dipolaire, et le mécanisme d'expulsion induit une composante toroïdale opposée au champ appliqué. Le bouclage obtenu est alors un bouclage antidynamo puisque le champ induit tend à détruire le champ appliqué. Ce bouclage négatif suggéré par \mathbf{B}_0 et \mathbf{B}_2 devient plus clair lorsqu'on considère les figures VIII.16 (a), (b), (c) et (d) qui représentent les champs \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_3 . Celles-ci montrent en effet que \mathbf{B}_3 possède une structure analogue à $-\mathbf{B}_1$.

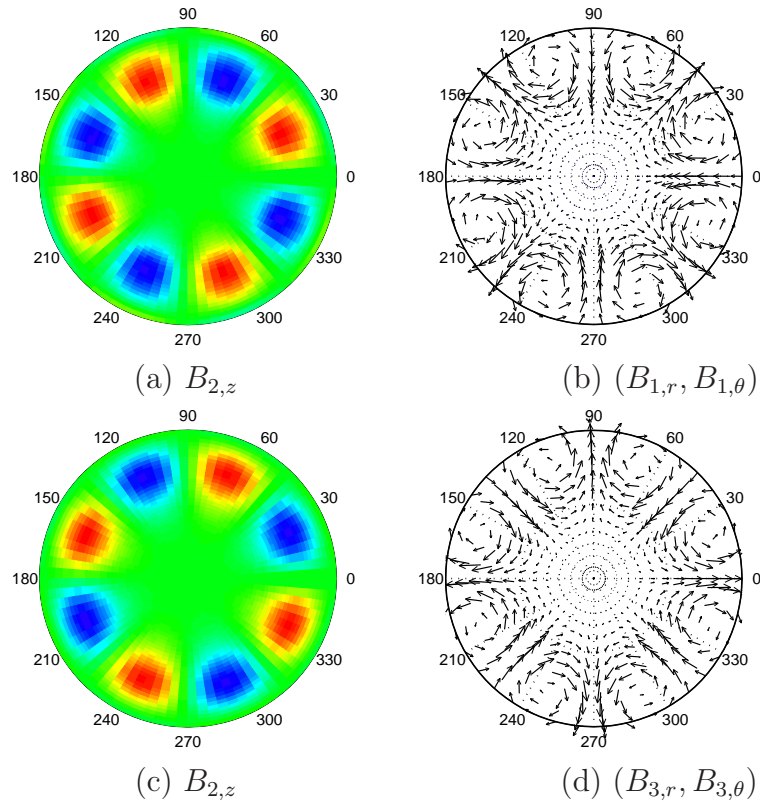


Fig. VIII.16: Coupe dans le plan $z = 0$ des champs \mathbf{B}_1 (dessus) et \mathbf{B}_3 (au dessus)

Pour quantifier la ressemblance entre les différents champs, nous définissons le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{B}_j et \mathbf{B}_k comme :

$$(\mathbf{B}_j | \mathbf{B}_k) = \frac{1}{2\pi R^2 H} \int_V \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{B}_k d^3\vec{r} \quad (\text{VIII.14})$$

Utilisant sa norme associée : $\mathcal{N}(\mathbf{B}_k) = \sqrt{(\mathbf{B}_k | \mathbf{B}_k)}$, nous définissons le produit scalaire normalisé de deux vecteurs :

$$P_{j,k} = \left(\frac{\mathbf{B}_j}{\mathcal{N}(\mathbf{B}_j)} \middle| \frac{\mathbf{B}_k}{\mathcal{N}(\mathbf{B}_k)} \right) \quad (\text{VIII.15})$$

Utilisant le produit scalaire normalisé, nous trouvons que $P_{2,3} \simeq 0$ et $P_{1,3} = -0,9$. \mathbf{B}_3 est donc quasiment anticolinéaire à \mathbf{B}_1 , et orthogonal à \mathbf{B}_2 .

Reprenant les notations de la section II.4.2, dans laquelle nous avons défini l'opérateur d'induction :

$$\mathcal{L} = -\Delta^{-1} \nabla \times (\mathbf{V} \times \bullet), \quad (\text{VIII.16})$$

le processus d'induction en deux étapes se traduit par la relation $\mathbf{B}_3 = \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_1 \simeq \gamma \mathbf{B}_1$. C'est un processus antidynamo avec un coefficient de bouclage $\gamma \simeq -1/400$.

La figure VIII.17 montre l'évolution de la composante axisymétrique des champs calculés aux ordres pairs $\langle \mathbf{B}_{2k} \rangle$, lorsqu'on itère l'opérateur d'induction. S'il apparaît sur cette figure que le recouvrement entre $\langle \mathbf{B}_{2k} \rangle$ et $\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_{2k} \rangle$ est très bon puisque $P_{k,k+2} \sim -1$, il est d'autant meilleur que l'ordre k est élevé. Cette propriété ne concerne d'ailleurs pas

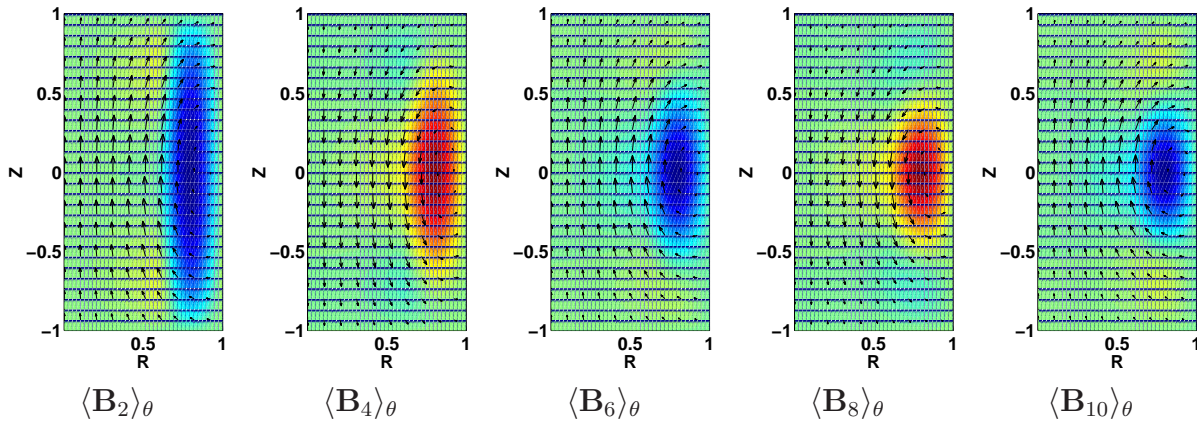


Fig. VIII.17: Évolution de la structure de la composante axisymétrique des champs induits aux ordres 2, 4, 6, 8 et 10. \mathbf{B}_{k+2} est quasiment opposé à \mathbf{B}_k , et la suite $(\mathcal{L}^k \mathbf{B}_0)$ converge en dix itérations vers un vecteur propre anti-dynamo de l'opérateur \mathcal{L}^2 .

que la moyenne azimuthale mais est aussi vraie pour la composante non axisymétrique des champs. Ainsi, au-delà de l'ordre $K = 10$, la structure du champ induit n'évolue plus et le produit scalaire normalisé est égal à -1 . Les champs \mathbf{B}_{10} et $\mathcal{L} \mathbf{B}_{10}$, qui sont orthogonaux ($P_{10,11} = 0$), forment alors une famille libre de vecteurs propres de \mathcal{L}^2 , qui engendre un sous-espace vectoriel stable par l'action de l'opérateur d'induction \mathcal{L} . Nous la nommons famille dipôle et reviendrons dans la partie traitant de l'analyse du cycle dynamo sur l'importance du résultat obtenu.

Évolution du champ induit avec R_m Le calcul des ordres successifs étant fait pour $R_m = 1$, l'évolution du champ induit avec R_m est donné par la série :

$$\mathbf{B}_{ind} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k R_m^k \quad (\text{VIII.17})$$

Puisqu'il n'est, bien sûr, pas possible de calculer l'ensemble des termes de la série, nous avons choisi de la tronquer à l'ordre 22. Ceci assure que la somme ait convergé à moins de 1% près pour l'ensemble des valeurs de R_m inférieures au rayon de convergence R_m^* . Les figures VIII.18 (a) et (b) représentent l'évolution en fonction de R_m des composantes axisymétriques axiale (calculée en $(r = 0, z = 0)$) et orthoradiale (calculée en $(r = 0.8, z = 0)$). Celles-ci montrent que pour $R_m \leq 8$, la solution tronquée à l'ordre 2, qui est celle que

l'on obtiendrait en utilisant l'approximation de champ moyen au premier ordre, décrit bien le champ induit par l'écoulement. Toutefois au-delà de cette valeur, il faut utiliser les termes d'ordres supérieurs et sommer la série pour décrire correctement le champ induit. On observe alors sur la figure (b) qu'à mesure que R_m augmente, le champ toroïdal total décroît progressivement pour être expulsé du centre des colonnes. A cette expulsion correspond une plus faible augmentation de l'induction axiale que ne le supposerait l'hypothèse de "first order smoothing" qui ne prend en compte que le champ induit à l'ordre 2.

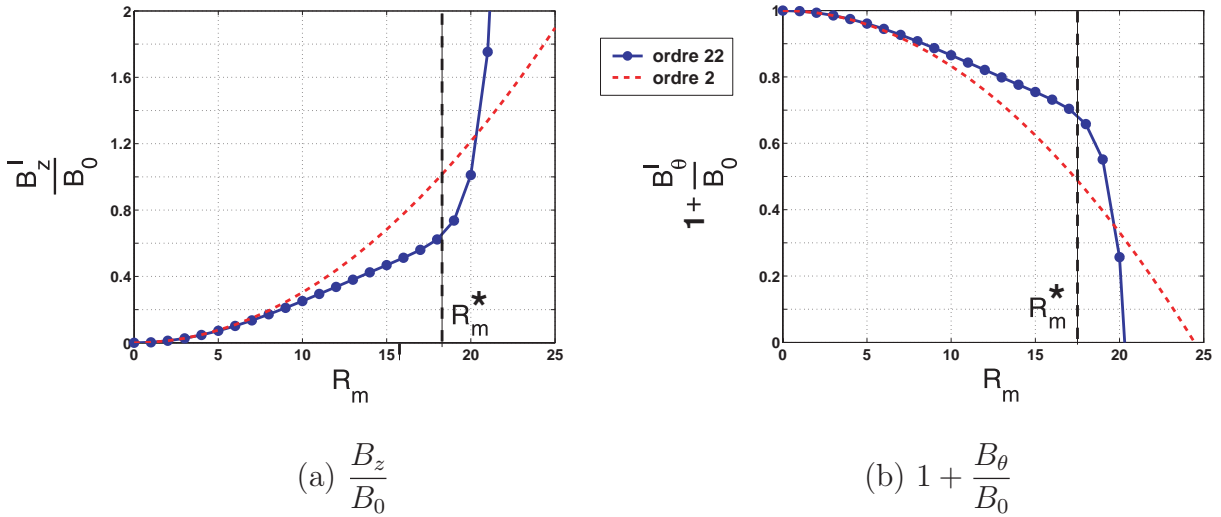


Fig. VIII.18: Évolution du champ magnétique induit en fonction de R_m . Figure (a) : composante axiale du champ induit au point $(r = 0, z = 0)$ pour une troncature à l'ordre 2 (ligne pointillée) et à l'ordre 22 (disques pleins). Figure (b) : composante orthoradiale du champ $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{ind}$ au point $(r = 0.8, z = 0)$ avec les mêmes conventions de tracé.

Puisque la méthode itérative conduit à un développement en série entière au voisinage de zéro, la somme VIII.17 ne converge que pour R_m inférieur à $R_m^* = 17$. Cette valeur de R_m^* se comprend avec le schéma de bouclage négatif d'ordre 2 que nous avons mis en évidence au paragraphe précédent. En effet, puisqu'on a $P_{k,k+1} = 0$ et $\mathbf{B}_{k+2} \sim \gamma \mathbf{B}_k$, on peut réécrire la série de manière approchée sous la forme :

$$\mathbf{B}_{ind} \sim (R_m \mathbf{B}_1 + R_m^2 \mathbf{B}_2) \sum_{k=0}^{\infty} (-|\gamma| R_m^2)^k \quad (\text{VIII.18})$$

La série géométrique de raison $-|\gamma| R_m^2$ ne convergeant que si le module de celle-ci est inférieure à 1, nous en concluons que le rayon de convergence de la série et de l'ordre de $1/\sqrt{|\gamma|} \sim 20$. La possibilité de resommer la série géométrique sous la forme

$$\mathbf{B}_{ind} \sim \frac{R_m}{1 + |\gamma| R_m^2} \mathbf{B}_1 + \frac{R_m^2}{1 + |\gamma| R_m^2} \mathbf{B}_2, \quad (\text{VIII.19})$$

montre que la divergence observée, qui correspond à un mécanisme d'expulsion, n'est pas due à l'instabilité dynamo, mais provient de la présence des pôles imaginaires purs de la fonction rationnelle.

Remarque : cette forme de fraction rationnelle n'est qu'approchée puisque comme nous l'avons vu, le bouclage négatif à deux coups ne décrit bien que les ordres supérieurs à 10. On comprend néanmoins pourquoi la méthode des approximants de Padé, qui resomme les coefficients de la série entière sous forme d'une fraction rationnelle, est bien adaptée à la description des mécanismes d'expulsion [13, 15]. Elle permet en effet d'éliminer la divergence artificielle et donc d'étendre le rayon de convergence de la série. Lorsqu'on superpose les courbes obtenues par la méthode de Padé (lignes pleines) aux graphes précédents de la figure VIII.18, on obtient la figure VIII.19 qui montre la croissance beaucoup plus lente du champ induit aux grands R_m . Il semble même que le champ toroïdal sature dans la couronne.

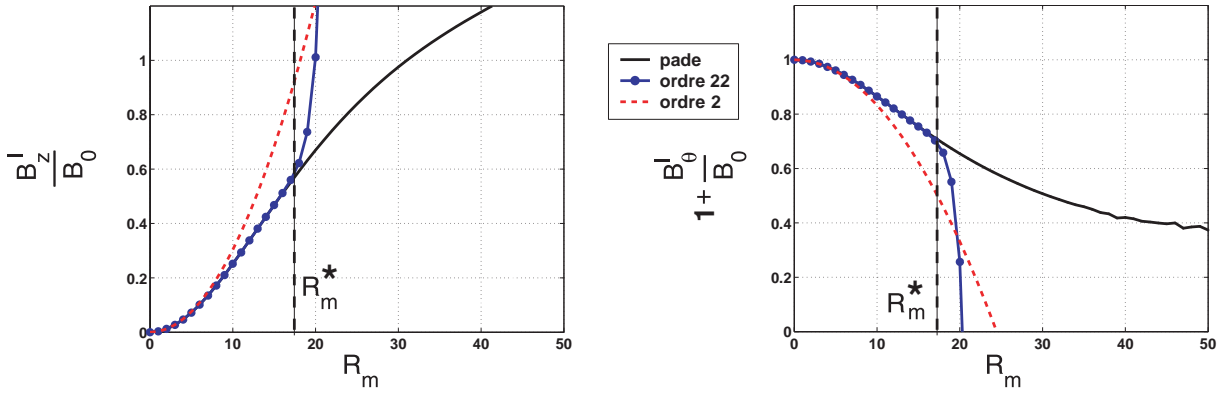


Fig. VIII.19: Évolution du champ magnétique induit en fonction de R_m lorsque la série est resommée en utilisant la méthode des approximants de Padé. Ligne tiretée (- -) : troncature à l'ordre 2. Ronds pleins (●), troncature à l'ordre 22. Ligne pleine (-), série resommée avec la méthode de Padé. Les sommes tronquées sont identiques à celles de la figure VIII.18.

VIII.3.2 Champ radial appliqué

En appliquant un champ magnétique dans la direction azimutale, nous avons trouvé un mécanisme d'ordre deux permettant d'effectuer la conversion d'un champ toroïdal en un champ poloïdal, ce qui constitue la moitié du bouclage d'un cycle dynamo. Nous allons donc maintenant appliquer un champ magnétique poloïdal à ce système et étudier sa conversion en un champ toroïdal, ce qui est la seconde moitié du cycle dynamo.

Le champ le plus simple auquel on puisse penser est un champ radial invariant à la fois par rotation autour de \mathbf{e}_z et par translation selon l'axe vertical. Le champ \mathbf{B}_0 est alors nécessairement de la forme $\mathbf{B}_0 = f(r)\mathbf{e}_r$. Celui-ci devant être à divergence nulle, la fonction $f(r)$ ne peut être choisie arbitrairement mais doit décroître comme l'inverse du rayon. Le respect de cette contrainte pour le champ \mathbf{B}_0 nous a semblé important puisque le code numérique permettant de calculer le champ induit ne résout pas l'équation d'induction sous la forme réduite

$$\Delta \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}_k - \mathbf{B}_k \cdot \nabla \mathbf{V}, \quad (\text{VIII.20})$$

mais l'équation plus générale

$$\Delta \mathbf{B}_{k+1} = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_k), \quad (\text{VIII.21})$$

qui n'est égale à la première que si \mathbf{V} et \mathbf{B}_k sont à divergence nulle. Afin de ne pas introduire d'artefact numérique, nous avons donc appliqué un champ de la forme :

$$\mathbf{B}_0 = \begin{cases} B_0 \frac{r}{a} \mathbf{e}_r, & r \leq a \\ B_0 \frac{a}{r} \mathbf{e}_r, & r \geq a \end{cases} \quad (\text{VIII.22})$$

Il n'est donc pas à divergence nulle pour $r \leq a$. Toutefois ceci n'a aucune incidence sur le champ induit puisque le terme source de l'équation $\Delta \mathbf{B}_1 = -\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0)$ est nul en dehors de la couronne.

Remarque : c'est uniquement dans un souci de cohérence et par volonté d'étudier les mécanismes d'induction dans des conditions similaires, que nous avons opté dans la partie précédente pour un champ orthoradial appliqué variant lui aussi comme l'inverse du rayon. En effet, dès lors que le champ toroïdal appliqué est invariant par rotation, il est à divergence nulle et les équations de Maxwell ne lui imposent aucune contrainte topologique dans l'espace conducteur.

VIII.3.2.1 Réponse à l'ordre 1

La figure VIII.20 montre une coupe dans le plan $z = 0$ du champ induit à l'ordre 1 par l'écoulement \mathbf{T}_2^1 . Alors qu'en champ azimuthal appliqué, le champ \mathbf{B}_1 est en quadrature avec le champ de vitesse, en champ radial nous observons que le champ induit à l'ordre 1 est en phase avec l'écoulement. La composante azimuthale est maximale au centre de chaque colonne, et la composante verticale est localisée à l'interface entre la graine et la couronne.

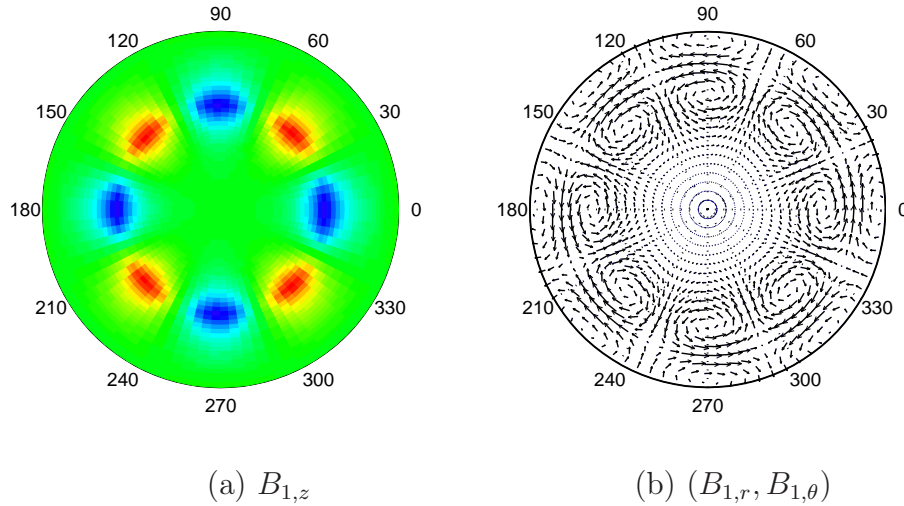


Fig. VIII.20: Coupe dans le plan $z = 0$ du champ induit à l'ordre 1 dans le cas d'un champ appliqué dans la direction radiale.

Si l'on compare la figure VIII.20 (a) à la figure VIII.6 (a), on trouve que dans chacun des vortex le signe de $\mathbf{B}_{1,z}$ est le même que celui de V_z^A . Dans la section précédente, nous avons montré que dans le plan $z = 0$, $B_{1,z}$ était produit par \mathbf{V}^A uniquement, alors que

$B_{1,\theta}$ était produit par la seule composante de rotation. Nous trouvons que ce résultat est toujours valable, et qu'il est confirmé numériquement lorsqu'on renverse les composantes du champ de vitesse. Le changement $\mathbf{V}^R \rightarrow -\mathbf{V}^R$ se traduit par le changement $B_{1,\theta} \rightarrow -B_{1,\theta}$, alors que le renversement de \mathbf{V}^A se traduit par un changement de signe de $B_{1,z}$. Nous allons donc pouvoir interpréter simplement la structure du champ induit à l'aide de la déformation des lignes de champ de \mathbf{B}_0 par chacune des composantes de l'écoulement.

Composante azimutale : la figure VIII.21 montre le mode d'action de la composante de rotation sur le champ localement transverse aux vortex. La composante V_θ^R entraîne les lignes de champ de \mathbf{B}_0 avec elle, ce qui se traduit par l'induction d'une composante azimutale, maximale au centre de chaque colonne, et dont le signe est donné par le signe de la vorticité du vortex considéré. Nous n'observons donc pas de différence flagrante par rapport au cas du champ orthoradial appliqué.

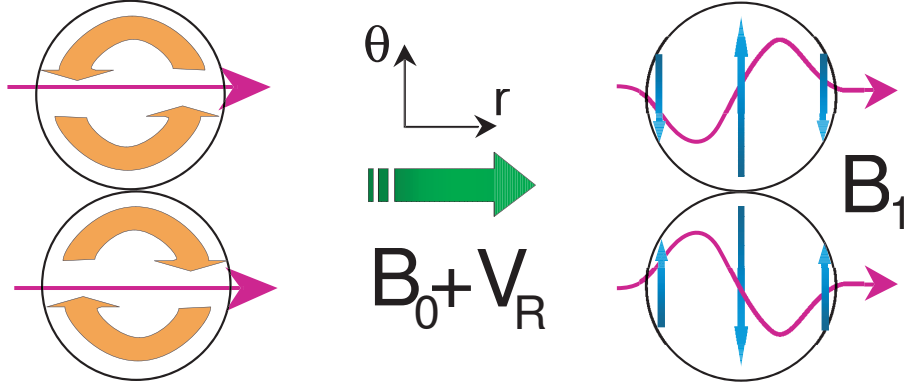


Fig. VIII.21: Distorsion d'une ligne de champ radiale par la composante de rotation dans une paire de colonne. Les lignes de champ radiales sont entraînées par la vitesse V_θ^R ce qui induit une composante $\mathbf{B}_{1,\theta}$ localisée au centre des colonnes, se renversant d'une colonne à l'autre puisque son signe est donné par le sens de rotation.

Composante verticale : la structure de la composante verticale $B_{1,z}$, qui est solution de l'équation :

$$\Delta B_{1,z} = -B_0 \frac{a}{r} \partial_r V_z^A, \quad (\text{VIII.23})$$

est plus difficile à interpréter. En effet, comme la vitesse axiale est de type translation solide dans la couronne, le gradient $\partial_r V_z^A$ est localisé aux interfaces graine-couronne et couronne-isolant. Intuitivement, on s'attendrait donc à observer une induction axiale localisée en $r = 0.6$ et $r = 1$. Or la figure VIII.22, qui représente un profil radial de $B_{1,z}$ pour $\theta = 0$ et $z = 0$, montre que le champ axial maximal à l'interface graine-couronne, et qu'il est voisin de zéro en $r = 1$.

Le résultat observé correspond alors au dessin de la figure VIII.23. Le gradient $\partial_r V_z^A$ agit à l'intérieur du cylindre conducteur pour produire un champ vertical localisé en $r = 0.6$ du même signe que celui de la composante V_z^A , mais ne déforme pas les lignes de champ qui sont déplacées en bloc au voisinage de $r = 1$. Comme à chaque fois que nous observons un résultat contre-intuitif, il faut nous tourner vers l'influence des conditions aux limites isolantes qui imposent au champ induit des contraintes topologiques.

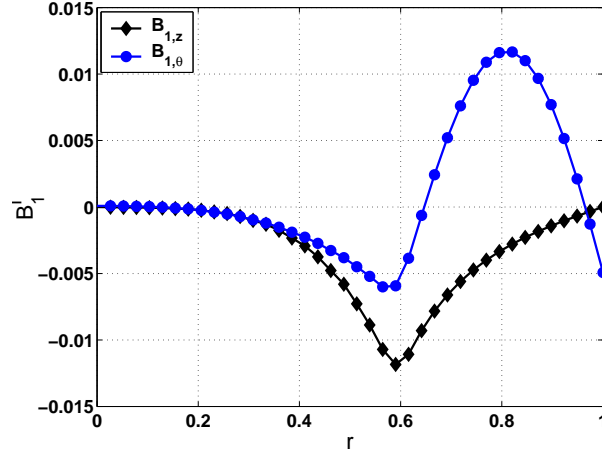


Fig. VIII.22: Profils radiaux du champ magnétique \mathbf{B}_1 pour $z = 0$ et $\theta = 0$. (\blacklozenge) : $B_{1,z}$. (\bullet) : $B_{1,\theta}$.

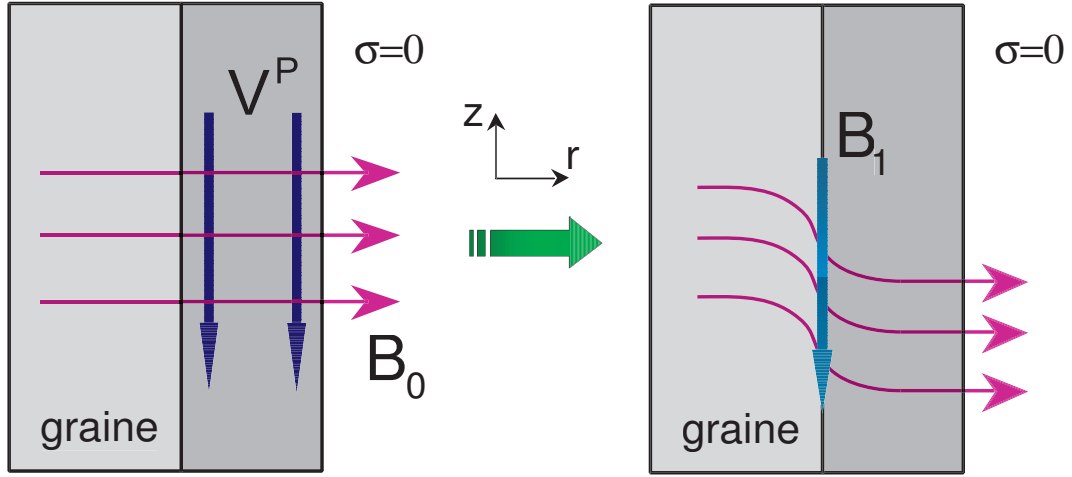


Fig. VIII.23: Effet d'étirement des lignes de champ radiales par le pompage axial. Alors que le cisaillement axial en $r = 0.6$ induit une composante verticale à l'interface graine-écoulement, celui-ci n'a aucune influence sur le champ appliqué à l'interface métal-isolant.

Pour simplifier le problème, nous allons montrer que si l'écoulement était indépendant de la coordonnée z , alors le champ induit serait rigoureusement nul à l'interface métal-isolant. Le problème d'induction est alors invariant par translation selon Oz , et les composantes du champ induit à l'ordre 1 ne dépendront pas de la coordonnée verticale. Or l'extérieur du cylindre étant isolant, le champ magnétique dérive d'un potentiel ϕ_m . Pour $r > 1$, nous aurons donc la relation $\mathbf{B} = -\nabla\phi_m$. Projetée sur \mathbf{e}_z , celle-ci implique que le potentiel s'écrive sous la forme :

$$\phi_m = z \cdot f(r, \theta) + g(r, \theta), \quad (\text{VIII.24})$$

avec $f(r, \theta)$ et $g(r, \theta)$ deux fonctions qui ne dépendent pas de z . Les trois composantes

sont alors liées, et vérifient les relations :

$$\begin{aligned} B_r &= -\partial_r g(r, \theta) - z \partial_r f(r, \theta) \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \partial_\theta g(r, \theta) - z \frac{1}{r} \partial_\theta f(r, \theta) \\ B_z &= -f(r, \theta) \end{aligned} \quad (\text{VIII.25})$$

Les composantes B_r et B_θ étant indépendantes de z , la fonction $f(r, z)$ ne peut être qu'une constante qui doit être nulle puisque le champ induit B_z s'annule lorsque $r \rightarrow \infty$. Le champ vertical induit est donc rigoureusement nul à l'interface, en $r = 1$.

L'écoulement que nous utilisons ayant une structure quasi-2d, les composantes \mathbf{V}^R et V_z^A ne varient qu'au second ordre en fonction de z au voisinage du plan médian. Il est alors possible d'extrapoler ce résultat au cas du champ vertical induit à l'ordre 1 dans le plan médian. Les symétries du dispositif n'assurent alors plus que le champ $B_{1,z}$ soit rigoureusement nul, mais montrent qu'il doit être couplé à des composantes radiale et orthoradiale impaires de z .

Recherchant quelles sont les sources de ces dernières, on trouve que seule la composante de recirculation V_θ^A peut convenir (cf équation VIII.10). Toutefois, l'amplitude de celle-ci n'est non négligeable qu'au voisinage de $z = \pm 1$ (loin de $z = 0$) et sa valeur maximale est cinq fois plus faible que celle de \mathbf{V}^R . Elle ne peut donc produire qu'une très faible composante B_θ au voisinage de $z = 0$, ce qui implique que le champ $B_{1,z}$ soit faible au voisinage de $r = 1$.

VIII.3.2.2 Réponse à l'ordre 2

Comme nous l'avons observé dans la partie précédente, la moyenne azimutale de \mathbf{B}_1 est nulle par construction. Les mécanismes coopératifs seront donc des effets d'ordres supérieurs. Comme dans le cas du champ azimutal, on s'attend à ce que la structure hélicitaire de l'écoulement permette d'obtenir une force électromotrice d'ordre 2 parallèle au champ appliqué. C'est effectivement ce que montre la figure VIII.24, qui représente une coupe dans le plan $z = 0$ de la force électromotrice $\mathbf{e}_2 = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1$. La figure (b) montre clairement la présence d'un courant radial localisé au centre de chaque colonne, qui ne se moyenne pas à zéro une fois le long de l'azimut. Cette force électromotrice \mathbf{e}_2 possède les mêmes symétries que celles de l'hélicité. Lorsqu'on renverse les vitesses \mathbf{V}^A et \mathbf{V}^R séparément, on renverse $e_{2,r}$ alors que celle-ci reste inchangée lorsqu'on renverse simultanément la rotation et le pompage. Comme dans le cas de l'action de la composante de rotation, nous retrouvons qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre les mécanismes d'induction en champ orthoradial, et ceux observés en champ radial.

Toutefois, alors qu'en champ toroïdal appliqué le courant électrique était majoritairement axisymétrique, la figure VIII.24 montre clairement que ce résultat n'est plus vrai en champ radial appliqué. Il apparaît même que la composante verticale $\mathbf{e}_{2,z}$, qui présente une dépendance en θ nombre d'onde double ($n = 8$) de celui de l'écoulement ($n = 4$), possède une composante axisymétrique négligeable. Ce résultat est net lorsqu'on étudie la figure VIII.25, qui représente une coupe $z = 0$ du champ induit à l'ordre 2. Pour quantifier l'importance de la partie fluctuante $\mathbf{b}_2 = \mathbf{B}_2 - \langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta$ par rapport à la moyenne, nous avons comparé la valeur maximale de la composante axisymétrique $\langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta$, à la valeur maximale

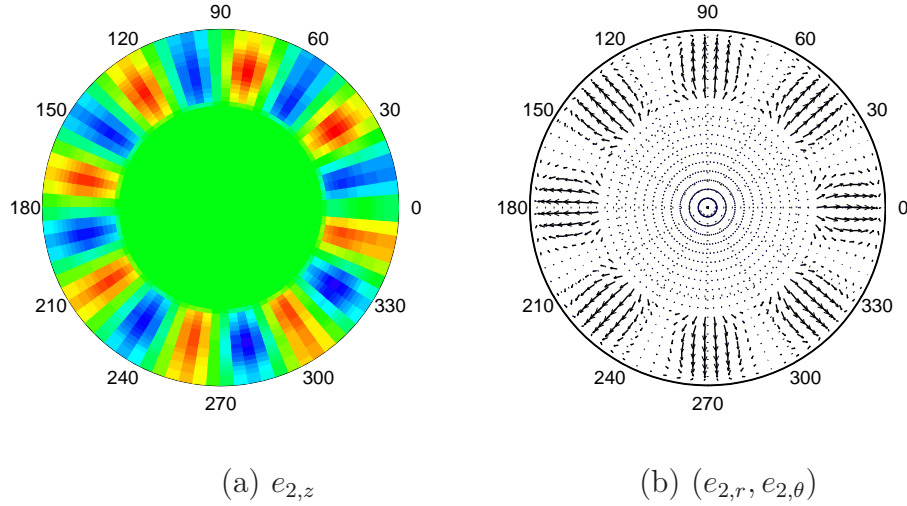


Fig. VIII.24: Coupe dans un plan $z = 0$ de la force électromotrice $\mathbf{e}_2 = \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1$.

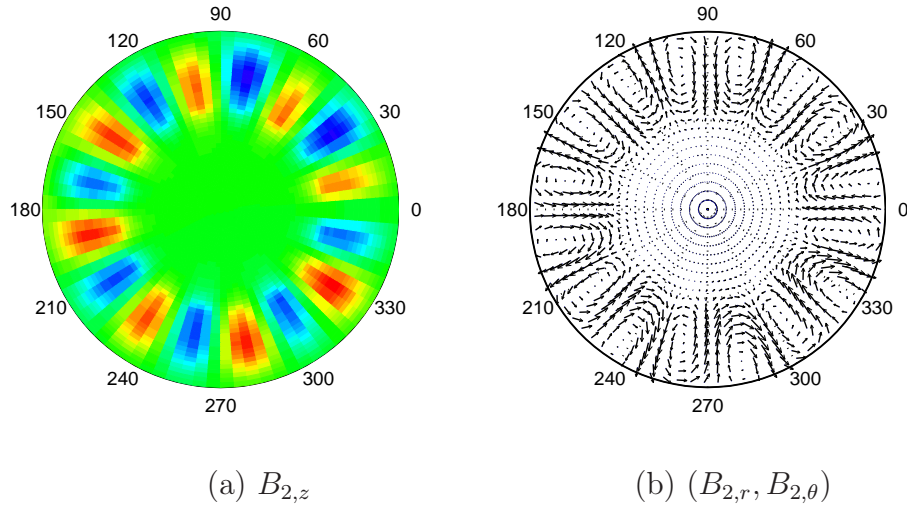


Fig. VIII.25: Coupe dans un plan $z = 0$ du champ induit à l'ordre 2.

de la valeur rms de \mathbf{B}_2 : $\mathbf{B}_{2,\text{rms}} = \sqrt{\langle (\mathbf{B}_2 - \langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta)^2 \rangle_\theta}$. Nous avons alors obtenu :

$$\max_{(r,z)}(|\langle \mathbf{B}_2 \rangle|) \sim \max_{(r,z)}(\sqrt{\langle (\mathbf{B}_2 - \langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta)^2 \rangle}) \sim 5.10^{-4}, \quad (\text{VIII.26})$$

ce qui montre qu'en champ radial appliqué, la partie fluctuante \mathbf{b}_2 est du même ordre de grandeur que la partie axisymétrique $\langle \mathbf{B}_2 \rangle$. Cette situation diffère notablement du cas du champ orthoradial pour lequel la valeur rms de \mathbf{B}_2 est de l'ordre de 10% de la valeur moyenne. Si l'apparition de cette composante non négligeable de fréquence double peut paraître surprenante a priori, elle se comprend toutefois très bien en considérant l'effet de l'écoulement hélicitaire dans une paire de colonnes sur le champ radial (figure VIII.27). Chaque colonne présentant une hélicité négative, elle produit un courant électrique radial par effet Parker qui pointe vers l'extérieur. Ainsi, chacun des vortex de la figure VIII.27 produit en deux étapes un champ \mathbf{B}_2 axial (celui que nous avons mesuré au chapitre IV) qui se renverse de part et d'autre de l'axe du vortex. Ainsi lorsqu'on dispose ceux-ci côte à côte, le champ vertical présente une fréquence spatiale double de celle de l'écoulement qui lui donne naissance. L'effet Parker tel que nous l'avons rencontré dans les expériences,

qui produit le champ axial $B_{2,z}$ dans le plan médian, apparaît donc comme un mécanisme non coopératif puisque le champ qu'il induit est nul en moyenne azimuthale.

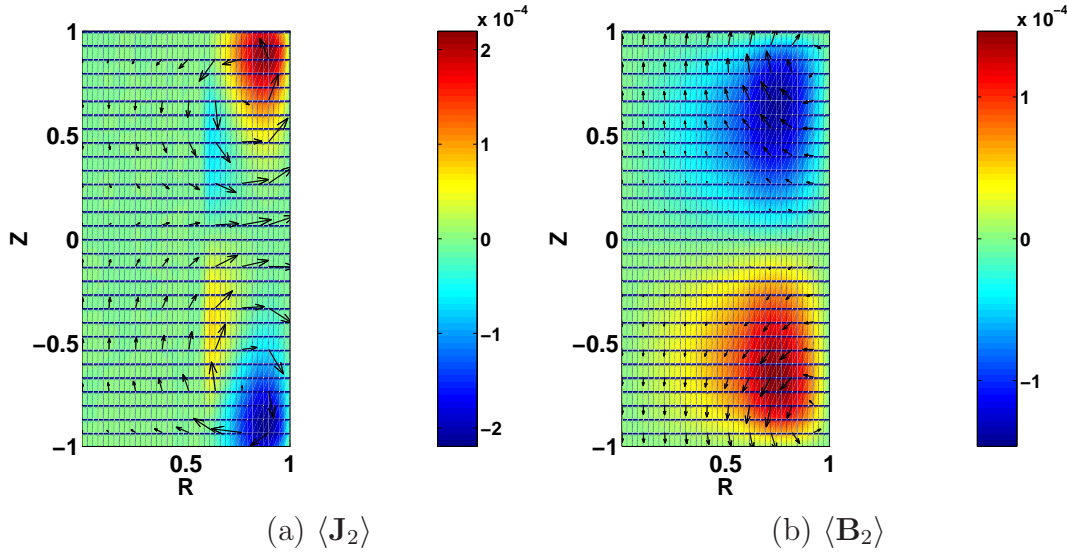


Fig. VIII.26: Coupe dans un plan $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ montrant le courant $\langle \mathbf{J}_2 \rangle_\theta$ (à gauche) et le champ magnétique $\langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta$ moyennés le long de l'azimut.

Effets coopératifs : la figure VIII.26 représente une coupe (r, z) du courant électrique moyen et du champ magnétique moyen obtenu à l'ordre 2. Elle montre que la composante axisymétrique du courant radial par effet α possède une structure quadrupolaire. En effet, la nappe de courant radial de la figure VIII.24 (b) doit nécessairement reboucler à l'intérieur du cylindre. Ce courant quadrupolaire est source d'un champ toroïdal \mathbf{B}_2^T localisé dans la couronne, et antisymétrique par rapport au plan $z = 0$. A première vue, cette conversion du champ radial en un champ toroïdal semble moins efficace que le mécanisme toroïdal \rightarrow poloïdal précédemment étudié. On trouve que le rapport $B_{2,\theta}/B_{0,r}$ est égal à 7.10^{-4} , alors que l'on avait obtenu $B_{2,r}/B_{0,\theta} \simeq 11.10^{-4}$. Toutefois alors que l'expulsion était le mécanisme le plus efficace, nous observons que la composante quadrupolaire \mathbf{B}_2^q opposée au champ radial appliqué est ici 20 fois plus faible que le champ toroïdal obtenu. Ceci laisse donc entrevoir la possibilité d'obtenir un cycle dynamo qui boucle positivement. Comme le montre la figure VIII.28, cette très faible expulsion du champ appliqué se comprend encore une fois en suivant une démarche qualitative de déformation des lignes de champ par l'écoulement. Chaque colonne expulse séparément le champ transverse. Toutefois, comme nous l'avons observé expérimentalement lors de l'étude des effets moyens dans le tore, si le champ induit par expulsion est opposé au champ appliqué au centre de chaque vortex, il renforce le champ appliqué à l'extérieur de chaque colonne. C'est donc parce que le champ radial "voit" les colonnes côte à côte que les effets d'expulsion se compensent lors de la moyenne.

Remarque : nous constatons à partir des deux exemples précédents que l'expulsion est largement diminuée dans la direction perpendiculaire à la direction présentant la séparation d'échelle. Ainsi cette dernière ne renforce pas particulièrement les effets d'induction favorables à la dynamo, mais permet de lutter de manière efficace contre le mécanisme d'expulsion.

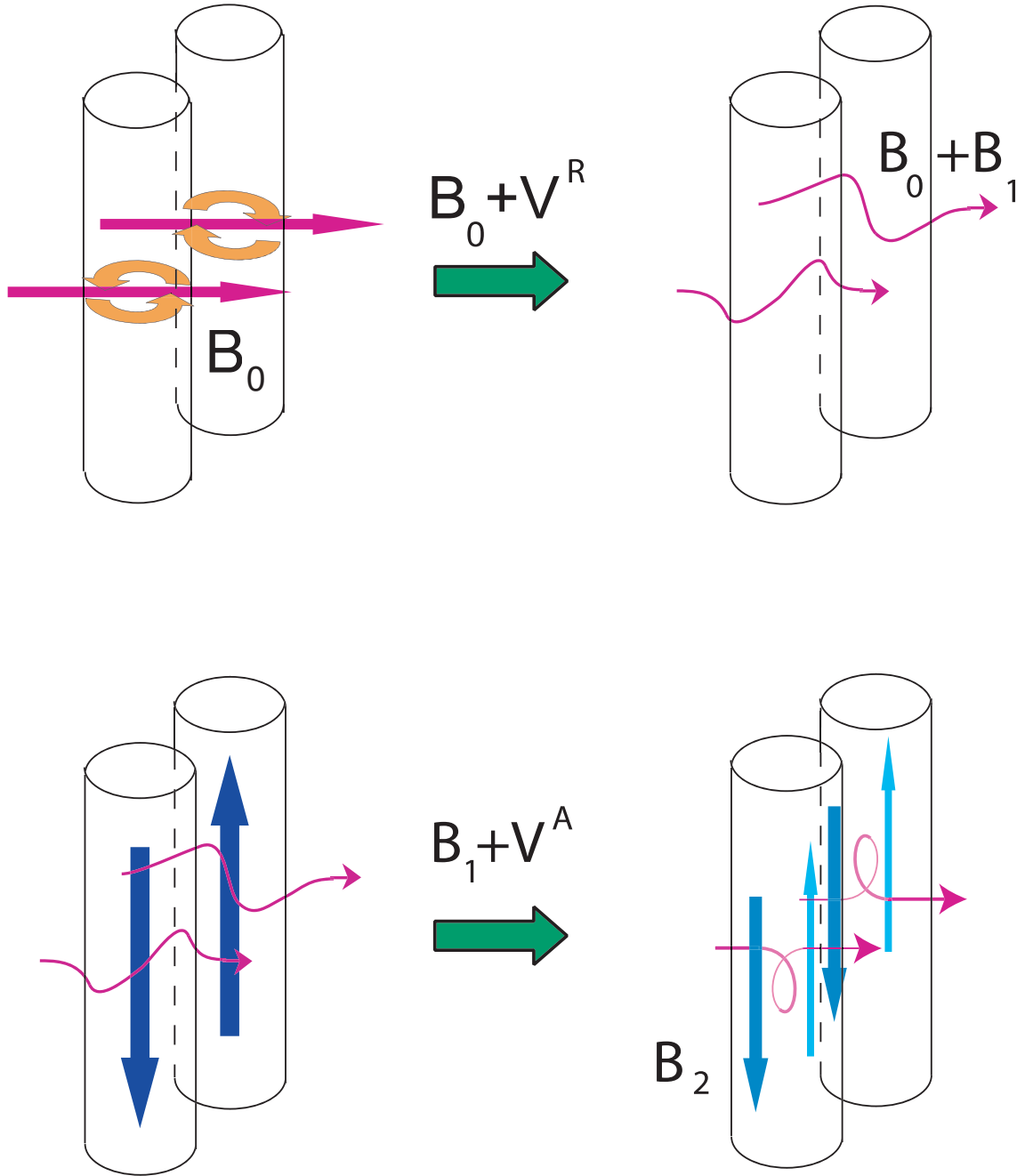


Fig. VIII.27: Schéma d'ordre 2 illustrant l'effet Parker dans une paire de colonnes. Les lignes de champ initialement radiales sont déformées dans un premier temps par la rotation pour donner le champ induit B_1 qui s'ajoute au champ appliqué. Elle sont ensuite étirées par le pompage pour donner deux boucles de champ $B_0 + B_1 + B_2$ montrant la génération d'une composante verticale B_2 se renversant de part et d'autre d'une colonne et changeant de signe d'une colonne à l'autre. Le nombre d'onde azimuthal de $B_{2,z}$ est donc le double de celui du champ de vitesse. Chaque boucle de champ est associée à un courant électrique $J_{2,r}$ parallèle au champ appliqué, de même sens que celui-ci, et localisé au milieu de chaque colonne. Il en résulte une nappe de courant radial qui va produire une composante orthoradiale axisymétrique se renversant par rapport au plan $z = 0$.

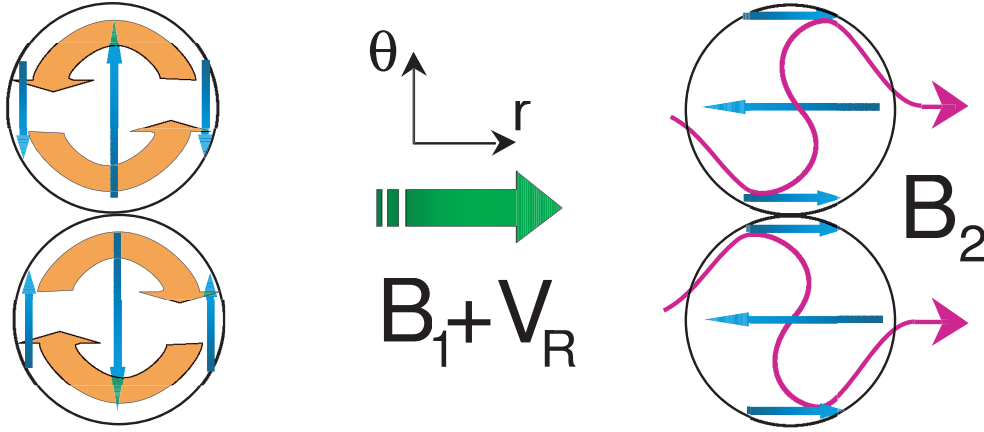


Fig. VIII.28: Schéma d'ordre 2 illustrant l'effet d'expulsion par une paire de vortex du champ radial appliqué. Les lignes de champ initialement radiales ont été étirées par la rotation, ce qui s'est traduit par l'induction d'une composante orthoradiale faisant un angle de $\pm\pi/2$ avec le champ appliqué. Au second ordre, la rotation induit à partir de \mathbf{B}_1 un champ radial qui se renverse de part et d'autre du vortex. Le résultat est donc l'induction d'un champ radial de fréquence double de celle du champ de vitesse.

VIII.3.2.3 Calcul aux ordres supérieurs

Le champ de vitesse possédant une structure composée de nombres d'onde $n = 4$ (termes $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ avec $n = 4$), nous avons trouvé un champ \mathbf{B}_1 composé d'harmoniques $n = 4$, et un champ \mathbf{B}_2 composé d'harmoniques $n = 0$ et $n = 8$. Le champ obtenu à l'ordre 3, issu du champ électromoteur $\mathbf{V} \times \mathbf{B}_2$, est composé d'harmoniques $n = 4$ et $n = 12$ et ne possède pas de composante axisymétrique. Ce résultat est confirmé par la figure VIII.29, qui montre une coupe dans le plan $z = 0$ des champs obtenus aux ordres 1, 3 et 5. Cette figure montre de plus que les dépendances angulaires de \mathbf{B}_3 et \mathbf{B}_5 ne possèdent pas plus d'harmoniques que \mathbf{B}_1 . En outre, \mathbf{B}_3 et \mathbf{B}_5 présentent une structure analogue à celle de \mathbf{B}_1 , avec un recouvrement qui augmente rapidement, puisqu'il passe de $P_{1,3} \sim -0.5$ à $P_{3,5} \sim -0.9$.

Il semble donc qu'on ait encore une fois initialisé un mécanisme d'expulsion d'ordre 2 pour les champs obtenus aux ordres impairs. On peut comprendre ce mécanisme de bouclage négatif en considérant la figure VIII.30, qui montre l'évolution de la moyenne azimutale des champs obtenus aux ordres pairs successifs. En effet, le champ moyenné obtenu à l'ordre 2 possède une large composante toroïdale, environ 10 fois plus grande que sa composante poloïdale. En interagissant avec l'écoulement, elle va produire en deux étapes (par effet α) un champ poloïdal quadrupolaire \mathbf{B}_q^P ainsi qu'une composante toroïdale antisymétrique qui lui est opposée (mécanisme d'expulsion). Le champ obtenu à l'ordre 4 possède alors des composantes qui sont toutes du même ordre de grandeur. En itérant l'opérateur d'induction, nous avons donc fabriqué un mode antidynamo qui induit en deux étapes un champ qui lui est opposé. Comme le montre la figure VIII.30, le champ obtenu par itérations successives converge vers une structure quadrupolaire bouclant négativement en deux coups, et qui n'évolue plus au delà de l'ordre $k = 12$. Au-delà de 12 itérations, le champ induit vérifie les propriétés :

$$(\mathbf{B}_k \mid \mathcal{L}\mathbf{B}_k) = 0, \quad \mathcal{L}^2\mathbf{B}_k = -\gamma\mathbf{B}_k, \quad \gamma = \frac{1}{415}. \quad (\text{VIII.27})$$

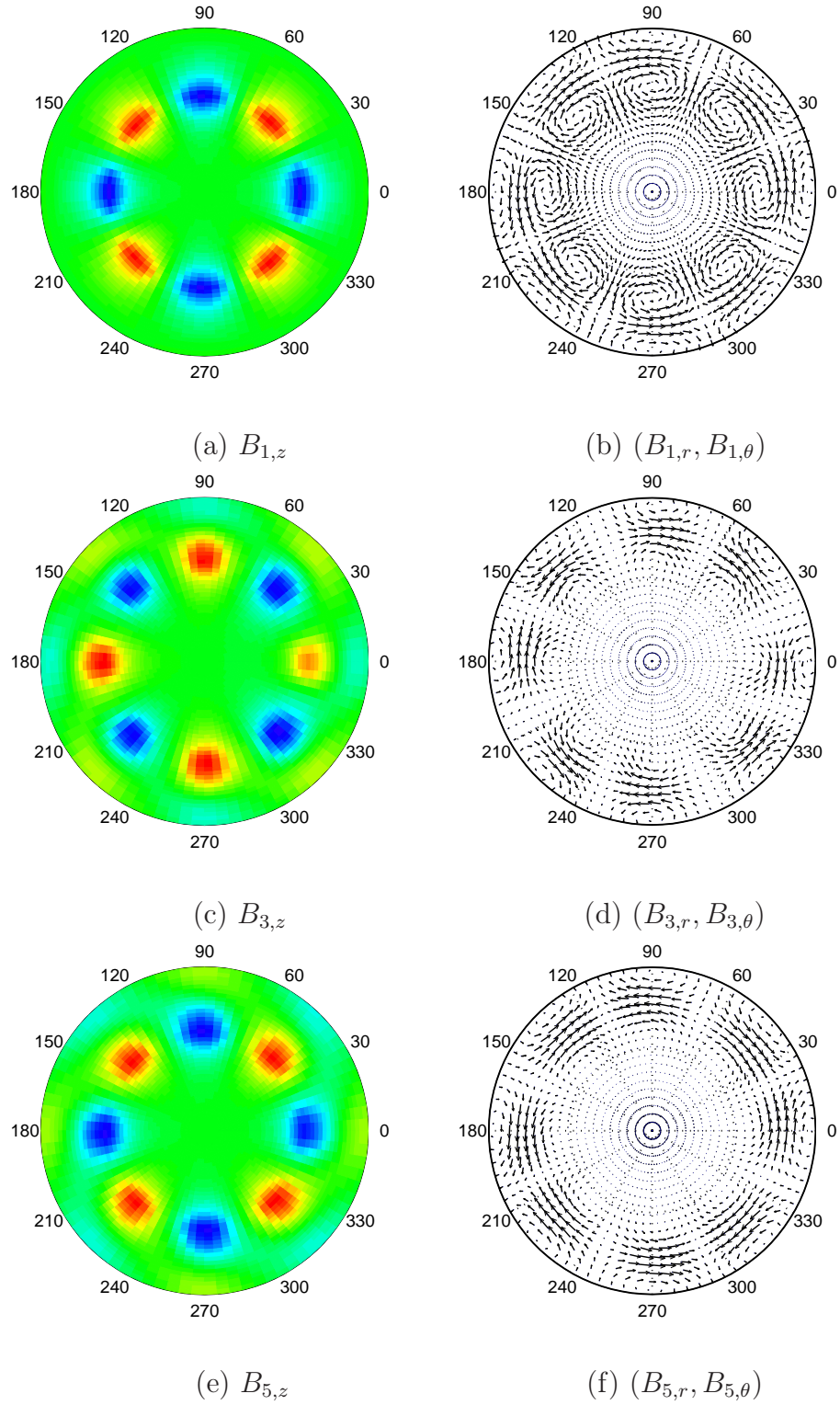


Fig. VIII.29: Champ radial appliqué : coupe dans le plan $z = 0$ des champ \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_3 et \mathbf{B}_5 .

Nous avons donc trouvé une autre famille libre de vecteurs propres de \mathcal{L}^2 , associés à la valeur propre $\gamma = -1/415$, qui engendre un sous-espace vectoriel stable par \mathcal{L} associé aux symétries du quadrupôle. Comme les deux vecteurs propres quadrupolaires que nous avons obtenus sont de plus orthogonaux à ceux de la famille dipôle, les sous-espaces dipôle et quadrupôle sont donc disjoints.

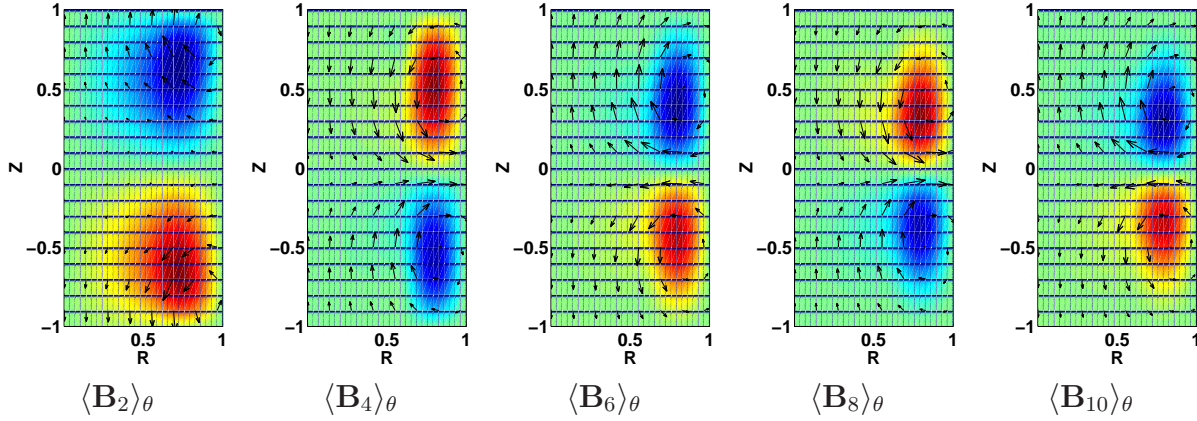


Fig. VIII.30: Champ radial appliqué : composante axisymétrique des champs induits aux ordres 2, 4, 6, 8 et 10.

Évolution fonction de R_m : la figure VIII.31 montre l'évolution du champ magnétique $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{ind}$ sommé à l'ordre 22 en fonction du nombre de Reynolds magnétique R_m . Le champ induit ayant une structure quadrupolaire, il est quasiment nul au voisinage de $z = 0$. Nous montrons l'évolution du champ induit au point $(r = 0.8, z = -0.6)$. La figure (b) montre que pour $R_m < 10$ la croissance de la composante orthoradiale du champ induit est bien décrite par le calcul à l'ordre 2. Lorsque R_m devient plus grand que 10, il faut sommer la série, et l'on observe que le champ toroïdal induit croît moins vite du fait de son expulsion par la composante de rotation. La série diverge pour $R_m = R_m^* \sim 18$ valeur encore une fois très proche de la valeur $1/\sqrt{|\gamma|} \sim 20.3$, que l'on aurait estimé à partir du bouclage aux ordres élevés. Une fois resommée à l'aide de la méthode de Padé, cette composante continue de croître à mesure que l'on augmente R_m , et ce jusque pour $R_m \sim 50 - 60$, valeur typique au delà de laquelle la méthode de Padé donne une solution s'écartant notablement de tout résultat physique. La figure (a) montre l'évolution de la composante radiale du champ total calculé au point $(r = 0.8, z = 0)$, là où l'amplitude de la composante quadrupolaire induite est la plus grande. Contrairement au cas du champ toroïdal appliqué, qui montrait un champ total diminuant avec R_m , le champ induit ne s'oppose pas au champ appliqué dans la couronne mais l'amplifie. Ce champ colinéaire et de même sens que le champ appliqué apparaît de manière indirecte puisqu'il n'évolue pas quadratiquement avec R_m , mais croît comme R_m^4 . Il est en effet obtenu par conversion en deux étapes du champ toroïdal obtenu à l'ordre 2, résultat dû à la faible expulsion du champ appliqué déjà constatée lors de l'étude des effets d'ordre 2.

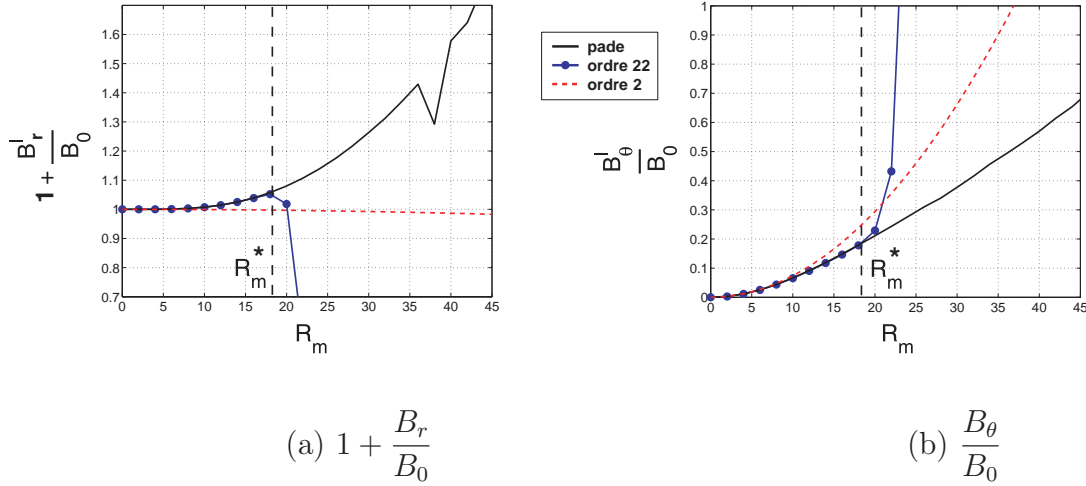


Fig. VIII.31: Champ radial appliqué : figure (a) : Composante radiale du champ magnétique total calculé au point $(r = 0.8, z = -0.6)$ en fonction de R_m . Figure (b) : composante azimutale du champ magnétique induit calculé au point $(r = 0.8, z = -0.6)$ en fonction de R_m . (•), somme tronquée à l'ordre 22. Ligne pointillée (- -), somme tronquée à l'ordre 2. Ligne pleine, série resommée par la méthode de Padé.

VIII.3.3 Cas du champ axial

Après l'étude des mécanismes d'induction en champ radial appliqué, nous étudions la possibilité d'une conversion d'un champ axial homogène $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ en un champ toroïdal induit.

Calcul à l'ordre 1 : dans le cas d'un champ uniforme appliqué dans la direction \mathbf{e}_z , seuls les gradients verticaux de la vitesse peuvent contribuer à l'induction. En trouve donc qu'un écoulement indépendant de la coordonnée verticale ne donne aucun effet d'induction. Puisque l'écoulement \mathbf{T}_2^1 n'est pas invariant le long de \mathbf{e}_z , il pourra interagir avec le champ appliqué pour induire un champ magnétique. La figure VIII.32 représente une coupe dans le plan $z = 0$ du champ \mathbf{B}_1 obtenu par résolution de l'équation d'induction en champ axial appliqué. Celle-ci montre que la composante axiale $B_{1,z}$ est nulle et que le champ possède une composante majoritairement orthoradiale.

L'absence de composante radiale à l'ordre 1 se comprend lorsqu'on réalise que la composante de rotation est indépendante de z . Les effets d'induction au premier ordre ne soit donc dus qu'au seul pompage \mathbf{V}^A , et le champ \mathbf{B}_1 est solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{B}_1 = -B_0 \partial_z V_\theta^A \mathbf{e}_\theta - B_0 \partial_z V_z^A \mathbf{e}_z \quad (\text{VIII.28})$$

Il n'y a donc pas de terme source pour la composante radiale dans tout le volume. En analysant la symétrie des termes source $\partial_z V_\theta^A$ et $\partial_z V_z^A$, on observe que le premier est une fonction paire de z alors que le seconde est impair. Il en découle que $B_{1,z}$ doit être une fonction impaire de z et que seul $B_{1,\theta}$ peut être différent de zéro dans le plan médian. Cet effet d'induction est beaucoup plus faible que ceux rencontrés jusqu'ici. En effet, alors qu'on a $B_1/B_0 \sim 4.10^{-2}$ en champ toroïdal appliqué, on observe ici que $B_1/B_0 \sim 3.10^{-3}$. La faiblesse de ce mécanisme d'induction, qui consiste en une distorsion dans la direction azimutale des lignes de champ verticales par le pompage, se comprend bien puisque

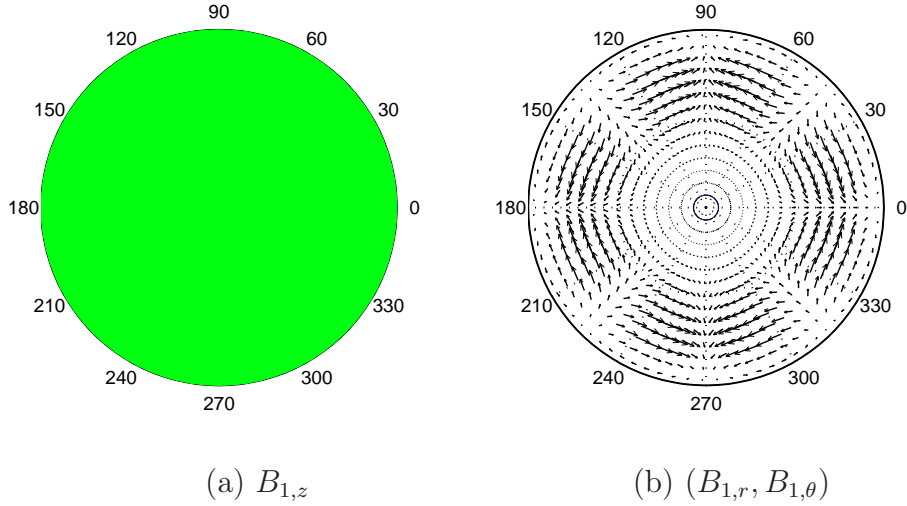


Fig. VIII.32: Champ axial appliqué, coupe dans le plan $z = 0$ du champ obtenu à l'ordre 1.

la recirculation V_θ^A est d'une part faible comparée aux autres composantes de la vitesse et présente un gradient vertical beaucoup plus faible du fait de la structure quasi-2d de l'écoulement.

Calcul à l'ordre 2 : la composante $B_{1,\theta}$ majoritaire dans le plan médian est proportionnelle à $\sin(n\theta)$. Elle est donc en phase avec la composante radiale de la rotation qui est, elle aussi, proportionnelle à $\sin(n\theta)$. Le résultat est donc une force électromotrice \mathbf{e} verticale non nulle en moyenne azimutale. Comme le montre la figure VIII.26, à la présence de cette force électromotrice moyenne correspond un courant vertical $J_{2,z}$ qui reboucle à l'intérieur du cylindre. L'apparition de ce courant vertical parallèle au champ appliqué, qui possède par construction les symétries de l'hélicité, trouve donc son origine dans les variations du champ de vitesse en fonction de la coordonnée z . Si cet effet d'induction est peu commun, tant l'habitude d'analyser des cas bidimensionnels est grande, il correspond tout de même à la phénoménologie développée dans les parties précédentes puisque le champ vertical a tout d'abord été déformé par les boucles du pompage pour être ensuite tourné par la rotation des colonnes.

Comme le montrent les figures VIII.33 (b) et VIII.34, on observe la conversion du champ vertical en un champ toroïdal. Toutefois celle-ci apparaît dix fois moins efficace que la conversion du champ radial en un champ orthoradial. De plus, comme le montre la figure VIII.33 (b), cette faible conversion s'accompagne de l'induction d'un champ dipolaire opposé au champ appliqué. Cet effet d'expulsion du champ axial par les boucles de recirculation du pompage est d'ailleurs l'effet dominant puisqu'il produit un champ axial quatre fois plus important que le champ toroïdal (figure VIII.34).

Calcul aux ordres supérieurs : comme le montre la figure VIII.33, le champ axisymétrique obtenu à l'ordre 2 possède une structure dipolaire. Il possède donc une projection assez grande sur le sous espace défini par la famille dipôle. En itérant l'opérateur d'induction, la suite (\mathbf{B}_k) va donc rapidement converger vers le vecteur propre de \mathcal{L}^2 que nous avons obtenu en champ orthoradial appliqué. C'est ce que confirme la figure VIII.35, qui montre

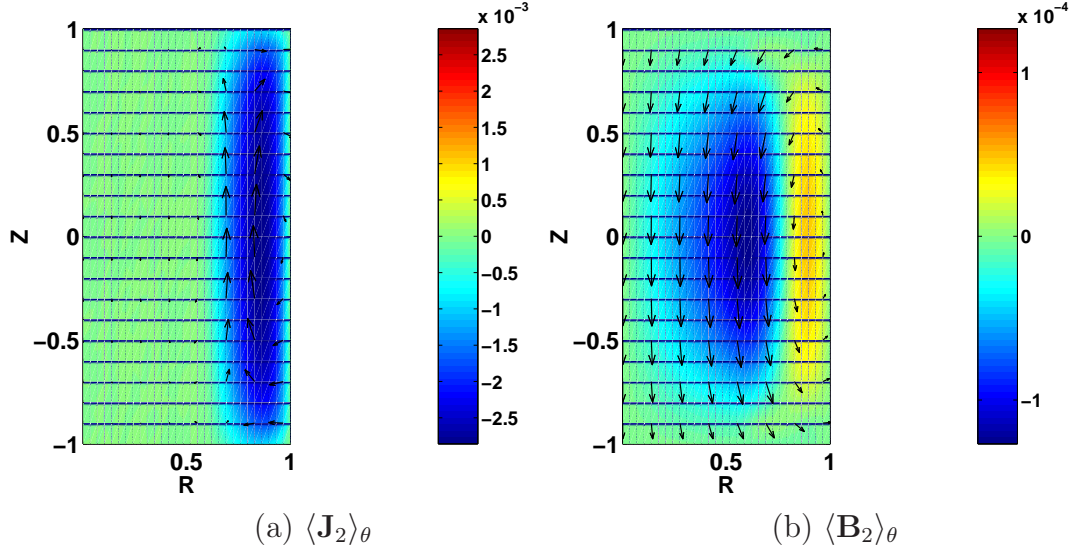


Fig. VIII.33: Champ axial appliqué. Figure (a) coupe dans un plan (r, z) de la composante axisymétrique de \mathbf{J}_2 . Figure (b) Composante axisymétrique du champ induit \mathbf{B}_2 .

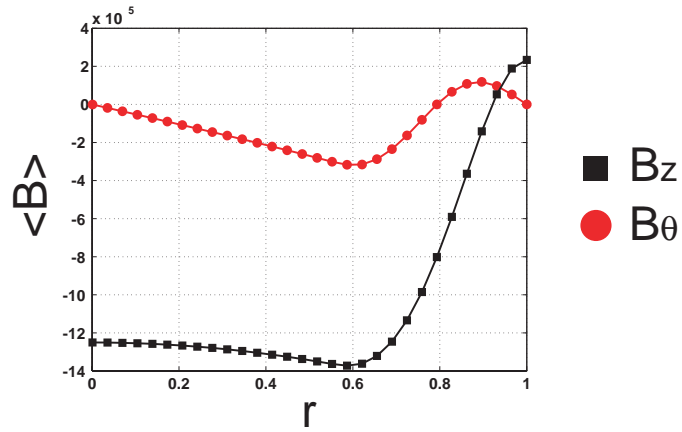


Fig. VIII.34: Profil radial du champ $\langle \mathbf{B}_2 \rangle_\theta$ dans le plan médian. (●) : composante azimutale $B_{2,\theta}$. (■) : composante axiale $B_{2,z}$. Les courbes sont tracées pour $B_0 = 0.25$ pour pouvoir être directement comparées à celle de la figure VIII.15.

l'évolution des composantes axisymétriques des champs calculés aux ordres pairs.

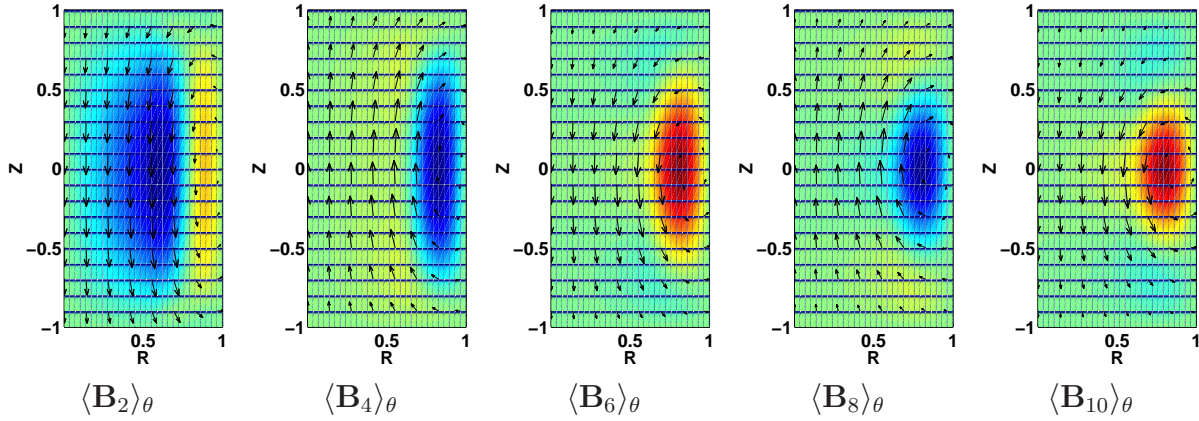


Fig. VIII.35: Champ axial appliqué : champs induits aux ordres 2, 4, 6, 8 et 10.

Évolution en fonction de R_m : la figure VIII.36 montre l'évolution de la composante axisymétrique du champ induit au point ($r = 0.8, z = 0$) en fonction du nombre de Reynolds magnétique. On observe la croissance lente du champ orthoradial ainsi que l'expulsion du champ magnétique axial par l'écoulement. De même que précédemment, la série tronquée à l'ordre 22 diverge au voisinage de $R_m^* \sim 18$ du fait du bouclage antidynamo du mode dipolaire. Le prolongement par la méthode de Padé fait alors apparaître que l'approximation d'ordre 2 décrit bien l'évolution de la composante orthoradiale jusqu'à des R_m de l'ordre de 50.

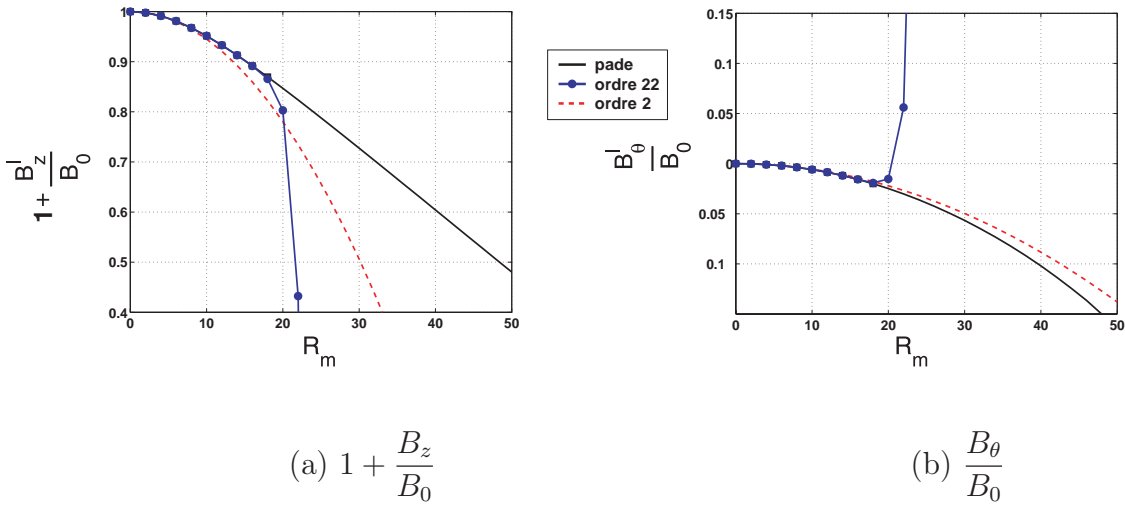


Fig. VIII.36: Champ axial appliqué : évolution du champ magnétique induit en fonction de R_m . (•) série tronquée à l'ordre 22. (- -) Approximation d'ordre 2. (-) série resommée.

VIII.4 Conclusion sur les mécanismes d'induction

Nous avons successivement appliqué des champs axisymétriques dans les directions \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_z , et avons étudié dans chaque cas les mécanismes d'induction. Nous avons alors remarqué que l'écoulement \mathbf{T}_2^1 est capable de produire un courant parallèle au champ appliqué par effet α . Nous avons, de plus, remarqué que du fait de la structure quasi-2d de l'écoulement, l'effet de conversion du champ axial est négligeable devant l'interaction entre l'écoulement et les champs appliqués perpendiculairement à l'axe des colonnes. L'écoulement \mathbf{T}_2^1 montre donc une analogie forte avec l'écoulement de Roberts,

$$\mathbf{V} = V_0 \begin{pmatrix} \sin(ky) \\ \sin(kx) \\ \cos(kx) - \cos(ky) \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.29})$$

dont nous rappelons, en annexe IX.5, l'analyse dynamo dans le cadre de l'approximation de champ moyen au premier ordre.

- Dans le cas d'un champ appliqué perpendiculairement aux colonnes, ils permettent tout deux d'observer l'apparition d'une force électromotrice dans la direction du champ appliqué.
- La structure en anneau montre que lorsqu'il y a séparation d'échelle dans une seule direction, alors la composante parallèle à cette direction est expulsée des colonnes par un mécanisme d'ordre 2. Ceci permet d'ailleurs de comprendre pourquoi dans l'écoulement de Roberts, qui présente une séparation d'échelle dans les directions Ox et Oy , le mécanisme d'expulsion n'agit qu'à l'ordre 4 [78].

Cette analogie forte va nous permettre de tirer profit de notre connaissance des modes dynamo de l'écoulement de Roberts, et ainsi d'exploiter les résultats des bouclages négatifs obtenus. Pour cela, appliquons l'approche itérative aux modes dynamo de l'écoulement de Roberts. Notant $P = \pm 1$, ceux-ci s'écrivent en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{B}_\epsilon = B_0 \sin(Kz) \mathbf{e}_x + \epsilon B_0 \cos(Kz) \mathbf{e}_y, \quad (\text{VIII.30})$$

Ils s'écrivent comme la superposition de deux composantes cartésiennes orthogonales élémentaires $\mathbf{B}_x = B_0 \sin(Kz) \mathbf{e}_y$ et $\mathbf{B}_y = B_0 \cos(Kz) \mathbf{e}_x$. Celles-ci partagent la propriété d'être à divergence nulle, d'être orthogonales, et de posséder des symétries différentes dans le renversement $z \rightarrow -z$. Supposons alors que l'on applique un champ magnétique de la forme \mathbf{B}_x à l'écoulement VIII.29. Au premier ordre, la réponse possède la périodicité de l'écoulement et nous n'obtenons pas de réponse moyenne. A l'ordre 2, et par effet α , l'écoulement induit une force électromotrice moyenne $\langle \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1 \rangle$ directement proportionnelle au champ appliqué. Notant λ la diffusivité magnétique du métal, on a :

$$\langle \mathbf{e}_2 \rangle = -\frac{V_0^2}{\lambda k} \mathbf{B}_x. \quad (\text{VIII.31})$$

Le champ induit à l'ordre 2 s'obtient alors en résolvant l'équation :

$$\lambda \Delta \mathbf{B}_2 = -\frac{V_0^2}{\lambda k} \nabla \times \mathbf{B}_x, \quad (\text{VIII.32})$$

ce qui permet d'obtenir le résultat

$$\mathbf{B}_2 = \frac{V_0^2}{\lambda^2 K k} B_0 \cos(Kz) \mathbf{e}_y = \frac{V_0^2}{\lambda^2 K k} \mathbf{B}_y. \quad (\text{VIII.33})$$

Ceci montre que l'on a $\mathbf{B}_2 = \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_x \propto \mathbf{B}_y$, et donc qu'on peut convertir \mathbf{B}_x en \mathbf{B}_y par un mécanisme d'ordre 2. De la même manière, nous aurions obtenu que l'on peut convertir \mathbf{B}_y en \mathbf{B}_x par effet α , ce qui montre que $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_x$ et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_y$ peuvent être écrits comme combinaison linéaire de \mathbf{B}_x et \mathbf{B}_y .

La famille libre $(\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$ engendre donc un espace vectoriel \mathcal{E}_{xy} stable par \mathcal{L}^2 . La restriction de \mathcal{L}^2 à cet espace s'écrit alors sous la forme de la matrice 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{V_0^2}{\lambda^2 K k} \\ \frac{V_0^2}{\lambda^2 K k} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.34})$$

Elle possède deux valeurs propres réelles et opposées $\epsilon V_0^2 / \lambda^2 K k$, qui sont associées aux deux superpositions possibles \mathbf{B}_ϵ . Or nous savons (chapitre II) que si l'on trouve un vecteur propre de \mathcal{L}^2 associé à une valeur propre positive γ , alors on peut construire un mode propre dynamo associé à la valeur propre $\gamma_{\mathcal{L}} = \sqrt{\gamma}$. Puisqu'il y a croissance du champ magnétique lorsque $\gamma_{\mathcal{L}} \geq 1$, nous obtenons alors la condition d'instabilité :

$$\frac{V_0^2}{\lambda^2 K k} \geq 1. \quad (\text{VIII.35})$$

En écrivant l'opérateur \mathcal{L}^2 comme une matrice 2×2 , nous avons donc retrouvé le résultat de l'annexe IX.5 qui présente l'analyse de champ moyen au premier ordre. Nous soulignons que cette approche a été possible grâce à une propriété caractéristique des dynamos α^2 : au mode dynamo donnant un bouclage positif est associé un mode anti-dynamo dont la structure est très proche de celle du mode neutre. Dans le "cas d'école" de l'écoulement de Roberts, il suffit pour passer de l'un à l'autre de changer ϵ en son opposé.

Comparant l'ensemble de ces résultats au cas de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 , le passage de la géométrie cartésienne à la géométrie cylindrique se traduit par les changements $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) \rightarrow (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. La construction du mode dynamo ne passe donc plus par la superposition des deux composantes perpendiculaires $(\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$ mais par le bouclage radial-orthoradial. Toutefois, comme le champ radial ne peut être seul à divergence nulle, il s'accompagne d'une composante axiale, et le bouclage du cycle dynamo va se faire entre deux modes élémentaires axisymétriques, l'un poloïdal, noté \mathbf{B}^P et l'autre toroïdal, noté \mathbf{B}^T .

Chapitre IX

Analyse dynamo pour les écoulements $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{T1}$

Au chapitre précédent, nous avons étudié les mécanismes d'induction dans l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$. Nous avons observé la conversion mutuelle des composantes poloïdale et toroïdale du champ magnétique par effet α , ainsi que l'expulsion par les colonnes des composantes qui leurs sont orthogonales. Ces études nous ont amenés à souligner l'analogie forte qui existe entre l'écoulement de Roberts et l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser celle-ci pour étudier la possibilité, dans les écoulements $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{T1}$, d'un cycle dynamo positif entre les composantes poloïdale et toroïdale d'un champ magnétique dipolaire ou quadrupolaire. Pour cela, nous allons adapter l'approche matricielle développée sur l'exemple de l'écoulement de Roberts, et diagonaliser la restriction de l'opérateur \mathcal{L}^2 aux sous-espaces vectoriels engendrés par les familles dipôle et quadrupôle.

IX.1 Mécanisme dynamo pour l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$

En appliquant plusieurs fois l'opérateur d'induction à un champ initial appliqué, nous avons remarqué que la suite (\mathbf{B}_k) converge rapidement (dix itérations) vers un vecteur propre de \mathcal{L}^2 . Dans le cas du champ orthoradial appliqué, nous avons obtenu un mode dipolaire (figure IX.1 (a)), et dans le cas du champ radial nous avons trouvé un mode quadrupolaire (figure IX.1 (b)).

Chacun des modes étant associé à une valeur propre négative, il résulte d'un bouclage négatif, et représente donc une solution antidynamo. Il est toutefois possible de comprendre pourquoi, dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$, la procédure itérative ne peut pas conduire à l'obtention d'un mode dynamo. Réexaminons pour cela le cas du champ orthoradial appliqué, qui est schématisé sur le figure IX.2, et analysons la réponse de l'écoulement à l'ordre 2. Une boucle de champ orthoradial \mathbf{B}_θ va donner, par effet α , une boucle de courant toroïdale fermée. Puisque dans l'exemple étudié l'hélicité \mathcal{H} est négative, α est positif, et le courant orthoradial circule dans le même sens que le champ appliqué. Cette boucle de courant est donc source d'un champ poloïdal dont la composante axiale est dirigée vers le haut au centre de la boucle. À cette conversion toroïdal \rightarrow poloïdal se superpose le mécanisme d'expulsion, qui crée une boucle de champ orthoradial opposée au champ appliqué. Le champ \mathbf{B}_2 est alors la superposition d'une composante poloïdale \mathbf{B}_2^P , et d'une composante toroïdale \mathbf{B}_2^T , qui vont se détruire l'une l'autre par application de \mathcal{L}^2 . En effet, lorsqu'on applique l'opérateur \mathcal{L}^2 à \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_2^P crée par effet α une composante \mathbf{B}_α^T opposée à \mathbf{B}_2^T , tandis que \mathbf{B}_2^T induit une composante \mathbf{B}_α^P opposée à \mathbf{B}_2^P . De même, le mécanisme d'expulsion produit deux composantes \mathbf{B}_{exp}^P opposé à \mathbf{B}_2^P et une composante \mathbf{B}_{exp}^T opposée à \mathbf{B}_2^T . Lorsqu'on somme les effets produits, on trouve que \mathbf{B}_4 est forcément

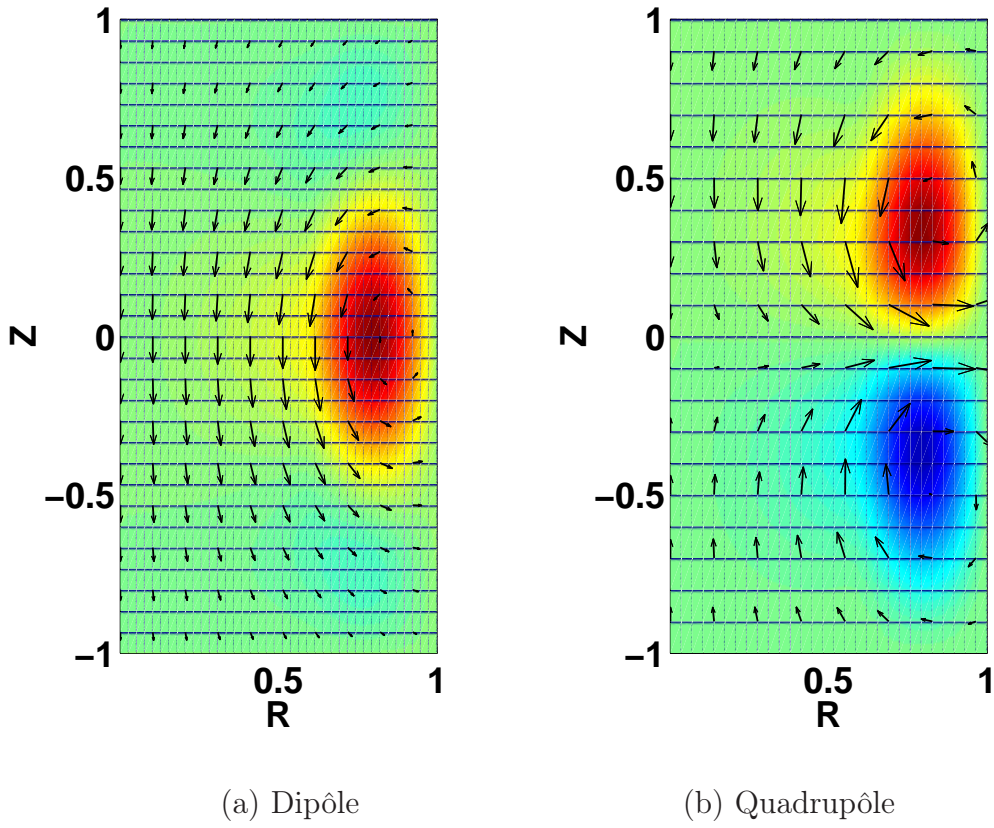


Fig. IX.1: Coupe dans un plan (r, z) des modes antidynamo obtenus pour l'écoulement $T_{\frac{1}{2}}$. Figure (a) : mode dipolaire. Figure (b) : mode quadrupolaire.

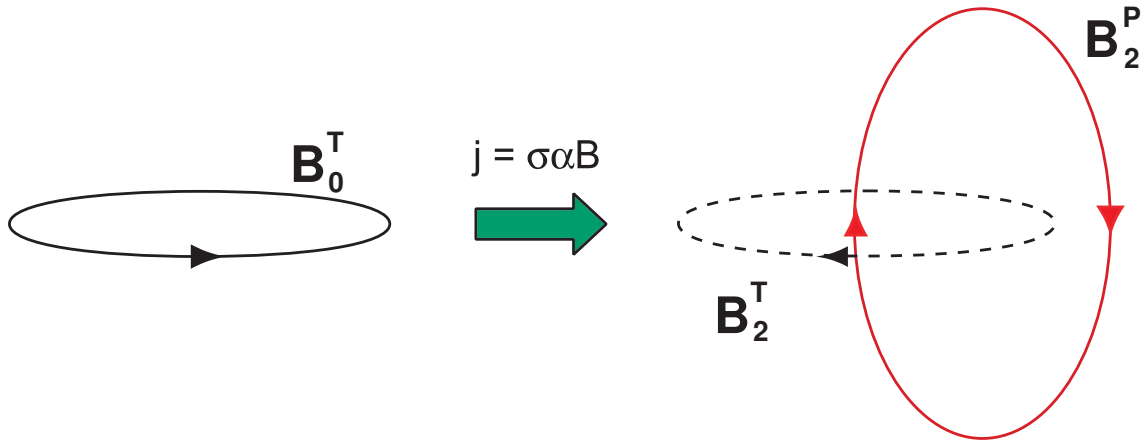


Fig. IX.2: Structure dipolaire du champ obtenu à l'ordre 2 dans le cas d'un champ orthoradial appliqué. Dans le cas présent l'hélicité est négative, et le courant obtenu par effet α est parallèle au champ appliqué et de même sens. En trait plein (rouge), composante poloïdale obtenue par effet α . Ligne pointillée, composante orthoradiale induite par le mécanisme d'expulsion.

opposé à \mathbf{B}_2 , ce qui montre que le bouclage en deux étapes est forcément négatif. Ainsi, dès lors que le mécanisme d'expulsion se manifeste, il fait apparaître la structure antidy-namo par itérations successives.

Cette analyse qualitative montre qu'à l'effet α , qui permet aux deux composantes de s'échanger par application de \mathcal{L}^2 , vient se superposer le mécanisme d'expulsion, qui produit une composante en deux étapes anticolinéaire au champ appliqué. Le problème présent, qui semblait a priori plus complexe que celui posé par l'écoulement de Roberts, va donc lui aussi pouvoir être ramené à la diagonalisation d'une matrice 2×2 .

IX.1.1 Mode dipolaire

Pour cela reprenons le champ moyen $\langle \mathbf{B}_{10} \rangle$ possédant la structure dipolaire présenté sur la figure IX.1 et séparons-le en ses composantes poloïdale et toroïdale. Nous obtenons alors, une fois les vecteurs normés, une base de vecteurs axisymétriques $(\mathbf{B}_d^P, \mathbf{B}_d^T)$ (figure IX.3), orthonormée et possédant la symétrie dipolaire sur laquelle on peut décomposer l'opérateur \mathcal{L}^2 .

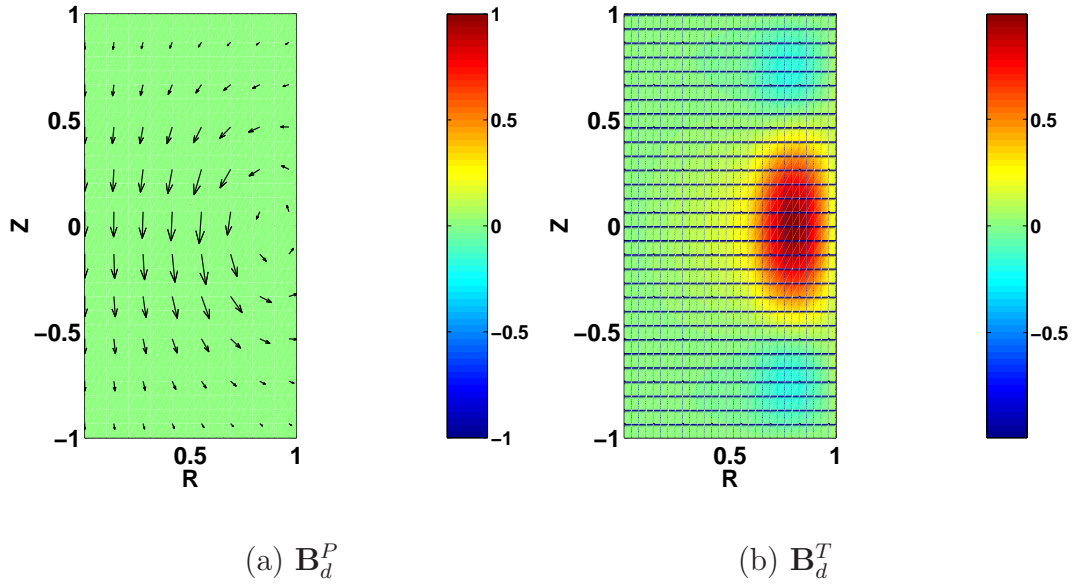


Fig. IX.3: Écoulement $T_{\frac{1}{2}}$. Vecteurs axisymétriques engendrant le sous-espace des pôles.

Les figures IX.4 (b) et (d) montrent le résultat obtenu lorsque l'on applique deux fois l'opérateur d'induction aux vecteurs \mathbf{B}_d^T et \mathbf{B}_d^T , et que l'on moyenne le résultat le long de l'azimut. On observe que la structure des champs induits donne un très bon recouvrement avec les vecteurs de base puisque le produit scalaire est, dans tous les cas, supérieur à 0.80. Nous trouvons de plus qu'ils leur sont opposés, résultat attendu puisque les vecteurs de base ont été définis à l'aide d'un mode bouclant négativement.

Définissant alors deux vecteurs \mathbf{b}_2^P et \mathbf{b}_2^T comme les parties non axisymétriques associées aux champs obtenus à l'ordre 2, et en négligeant pour l'instant l'erreur commise lors de la projection des champs induits sur les vecteurs de base, nous pouvons écrire :

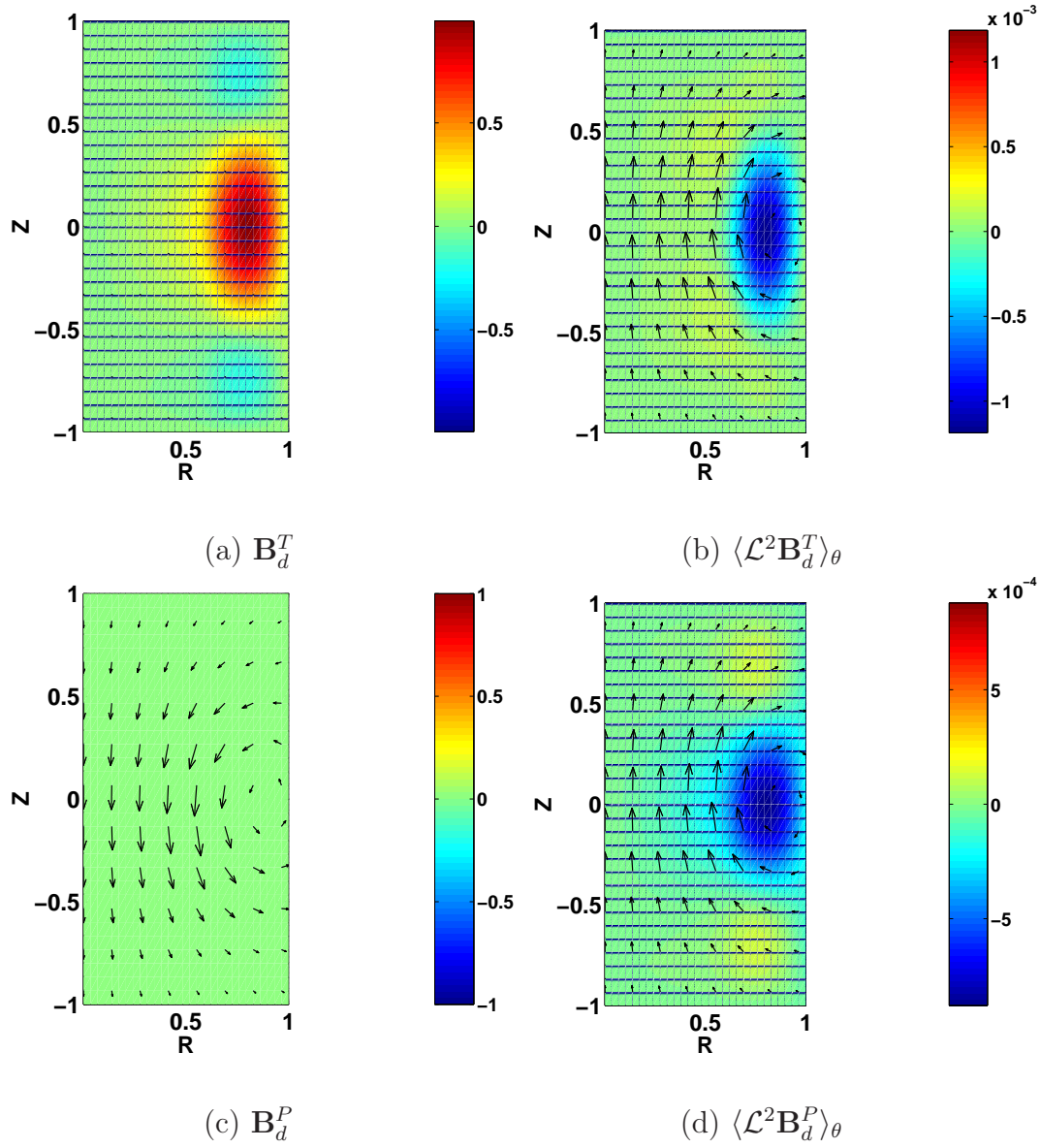


Fig. IX.4: Mode dipolaire : structure des composantes axisymétriques des champs obtenus par application de \mathcal{L}^2 aux vecteurs de base.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P &\sim M_{PP} \mathbf{B}_d^P + M_{TP} \mathbf{B}_d^T + \mathbf{b}_2^P \\ \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T &\sim M_{PT} \mathbf{B}_d^P + M_{TT} \mathbf{B}_d^T + \mathbf{b}_2^T\end{aligned}\tag{IX.1}$$

La relation liant le champ induit $\langle \mathbf{B}_2 \rangle$ dans le cas d'un champ appliqué $\mathbf{B}_0 = a \mathbf{B}_d^P + b \mathbf{B}_d^T$ s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\langle \mathbf{B}_2 \rangle = \begin{pmatrix} M_{PP} & M_{PT} \\ M_{TP} & M_{TT} \end{pmatrix} \mathbf{B}_0 \tag{IX.2}$$

Nous avons donc écrit la restriction de \mathcal{L}^2 au sous-espace des dipôles axisymétriques comme une matrice M de dimension 2 dont nous avons obtenu les coefficients à l'aide du produit scalaire défini précédemment :

$$M = \begin{pmatrix} (B_2^P | B_d^P) & (B_2^P | B_d^T) \\ (B_2^T | B_d^P) & (B_2^T | B_d^T) \end{pmatrix} \tag{IX.3}$$

Remarque : nous retrouvons ici pour la matrice 2×2 une forme analogue à celle obtenue pour l'écoulement de Roberts. Elle est composée de termes extra-diagonaux qui représentent le couplage entre les composantes toroïdale et poloïdale par effet α , et de termes diagonaux négatifs qui représentent l'expulsion du champ imposé par l'organisation des colonnes le long d'un anneau.

Analyse dynamo : ayant écrit l'opérateur \mathcal{L}^2 sous la forme d'une matrice 2×2 , la recherche du nombre de Reynolds magnétique critique associé au dipôle se ramène à la recherche d'une valeur propre positive pour M . Dans le cas de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 que nous avons étudié jusqu'ici, caractérisé par $n = 4$ paires de colonnes et un paramètre $P = 1.25$, la restriction de \mathcal{L}^2 aux dipôles s'écrit :

$$M = -10^{-4} \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \tag{IX.4}$$

Elle possède une valeur propre négative $\lambda_- = -25.10^{-4} = -1/400$ qui correspond à la valeur que nous avons obtenue en itérant l'opérateur d'induction. Elle possède de plus une valeur propre positive $\lambda_+ = 10^{-4}$, ce qui prouve que ce système peut entretenir un champ magnétique par effet dynamo pour $R_m \geq R_m^c = 1/\sqrt{\lambda_+} = 100$. Les modes propres de \mathcal{L}^2 correspondant aux deux valeurs propres ont la structure :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_+ &= 0.88 \mathbf{B}_d^P - 0.47 \mathbf{B}_d^T \\ \mathbf{B}_- &= 0.81 \mathbf{B}_d^P + 0.58 \mathbf{B}_d^T\end{aligned}\tag{IX.5}$$

A partir du calcul du vecteur propre de \mathcal{L}^2 par itérations successives, nous avons donc pu prédire si l'écoulement pouvait entretenir un dipôle, calculer le nombre de Reynolds magnétique critique $R_m^c = 100$, et obtenir la forme du mode neutre. Nous retrouvons a posteriori la propriété supposée des dynamos α^2 : les modes dynamo et antidynamo ont une structure très proche puisque le rapport entre les composantes poloïdale et toroïdale est proche de 1.8 dans les deux cas.

Estimation de l'erreur commise : pour pouvoir réduire l'opérateur \mathcal{L}^2 à sa forme matricielle, nous avons été amenés à négliger l'écart entre le champ induit à l'ordre 2 et sa projection sur la base $(\mathbf{B}_d^P, \mathbf{B}_d^T)$. Pour tenter de quantifier l'erreur ainsi commise, nous reportons sur la figure IX.5 les profils $B_r(r = 0.8, z)$ et $B_\theta(r, z = 0)$ des champs obtenus à l'ordre 2, normalisés par leur valeur maximale. Nous les comparons alors aux profils correspondants pour les vecteurs $\mathbf{B}_{d,r}^P(r = 0.8, z)$ et $\mathbf{B}_{d,\theta}^T(r, z = 0)$. La figure (a) montre que les profils de la composante radiale se superposent de manière quasi parfaite au profil initial. Nous en déduisons que la projection sur le vecteur \mathbf{B}_d^P se fait quasiment sans erreur. La figure (b), qui montre les profils de la composante azimutale, permet d'observer un résultat moins probant. Si la projection de $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P$ se superpose parfaitement à $B_d^T(r)$, le profil obtenu par expulsion de \mathbf{B}_d^T ne superpose qu'approximativement au champ initial. Nous trouvons que l'erreur ainsi commise est de l'ordre de 10% en valeur maximale.

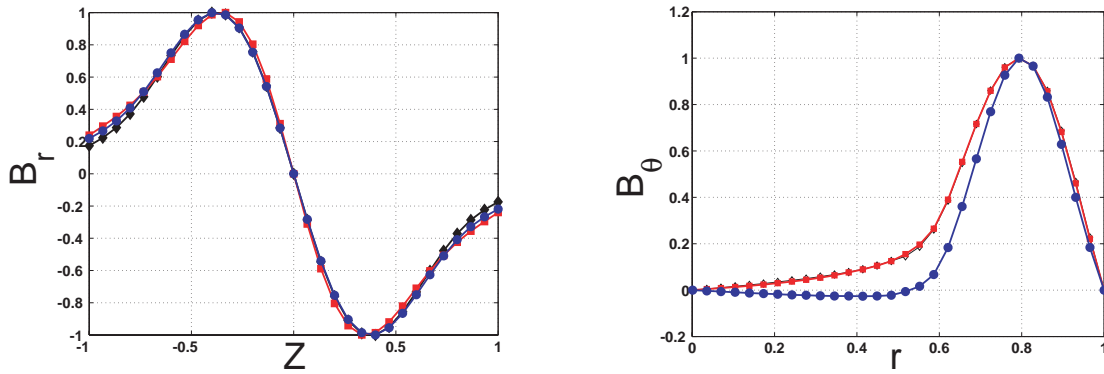


Fig. IX.5: Famille dipôle, estimation de l'erreur commise lors de la projection. Figure (a) : profil axial de B_r à une distance $r = 0.8$ de l'axe Oz . Figure (b) : profil radial de B_θ dans le plan médian. (■) : Champ appliqué. (◆) Composantes de $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P$. (●) Composantes de $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T$.

Ainsi, l'élément de matrice M_{TT} ne représente qu'approximativement le bouclage négatif du mécanisme d'expulsion. Toutefois, le profil réel étant toujours en dessous du profil $B_d^T(r)$, l'erreur commise est une surestimation de ce coefficient. Et puisque celui-ci est un terme d'expulsion néfaste à la dynamo, nous en déduisons que cette surestimation de M_{TT} ne remet pas en cause la capacité de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 à entretenir le dipôle. Elle conduit juste à une surestimation du seuil R_m^c . Pour quantifier cette surestimation du seuil, nous avons recalculé celui-ci lorsqu'on diminue M_{TT} de 10%. Nous avons alors trouvé que ce changement se traduisait par une diminution de 20% de R_m^c , dont on déduit que le seuil d'instabilité doit être compris entre 80 et 100.

IX.1.2 Mode quadrupolaire

De même que pour la famille dipôle, nous pouvons séparer le quadrupôle de la figure IX.1 (b) en ses composantes toroïdale (figure IX.6 (a)) et poloïdale (figure IX.6 (c)). Après normalisation, on obtient alors les vecteurs $(\mathbf{B}_q^P, \mathbf{B}_q^T)$, qui forment une base orthonormée du sous-espace vectoriel "quadrupôle axial". Les figures IX.6 (b), (d) montrent une coupe (r, z) des champs $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_q^T$ et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_q^P$ obtenus par application de \mathcal{L}^2 aux vecteurs de base.

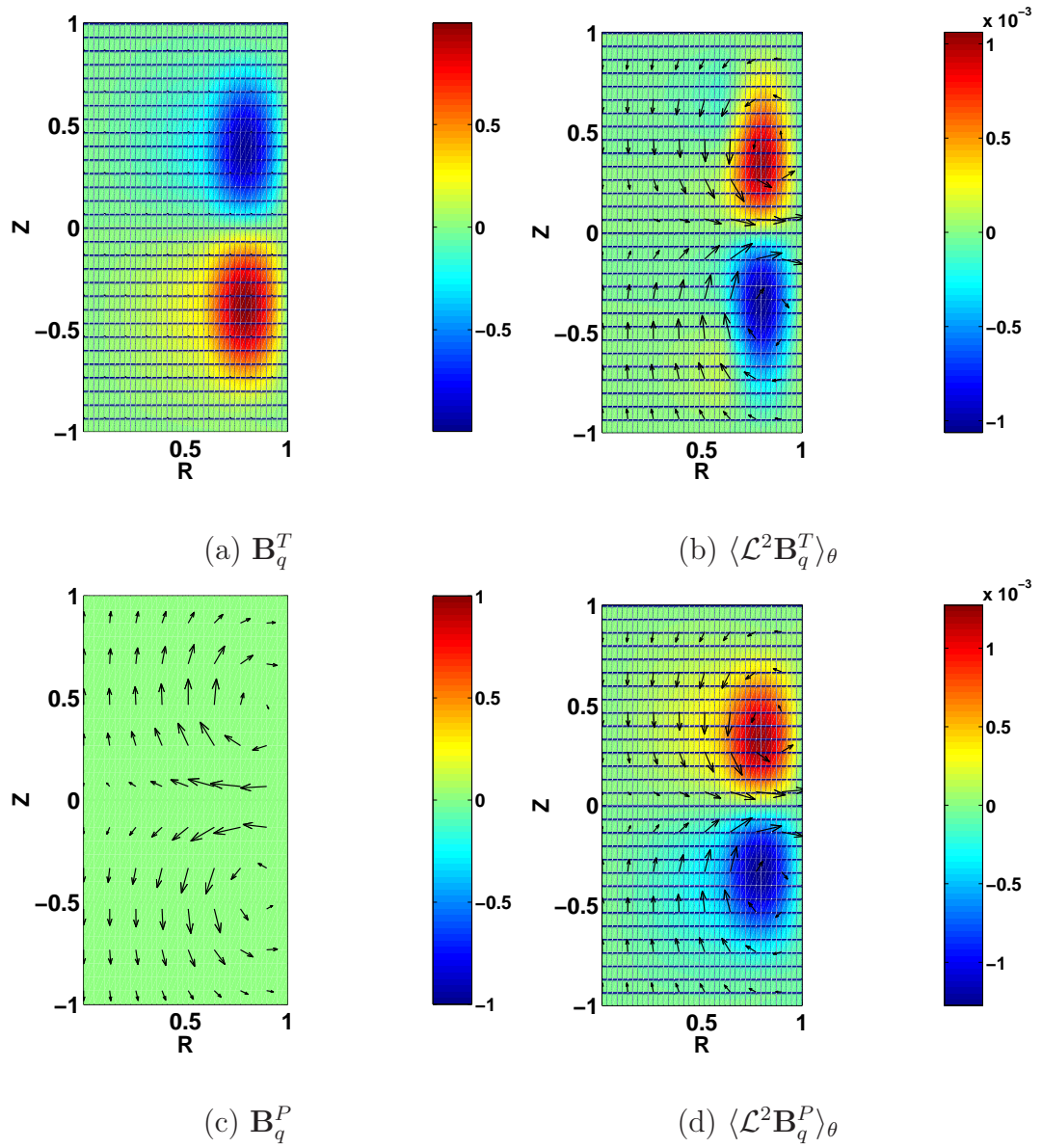


Fig. IX.6: Vecteurs de base du sous-espace des quadrupôles, et composantes axisymétriques des champs obtenus par application de \mathcal{L}^2 aux vecteurs \mathbf{B}_q^T et \mathbf{B}_q^P .

Constatant que les champs obtenus à l'ordre 2 se décomposent de manière approchée comme une combinaison linéaire de \mathbf{B}_q^T et \mathbf{B}_q^P , nous projetons le résultat obtenu sur la base $(\mathbf{B}_q^P, \mathbf{B}_q^T)$. La matrice M ainsi définie s'écrit :

$$M = -10^{-4} \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.6})$$

Elle possède aussi deux valeurs propres réelles et de signes opposés notées $\lambda_+^q = 2.10^{-4}$ et $\lambda_-^q = -23.10^{-4} = -1/430$. L'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ est donc aussi capable d'entretenir un quadrupôle avec un seuil $R_m^c = 1/\sqrt{\lambda_+} = 80$.

Les modes propres de \mathcal{L}^2 ainsi trouvés ont alors la structure :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+ &= 0.72\mathbf{B}_d^P - 0.69\mathbf{B}_d^T \\ \mathbf{B}_- &= 0.69\mathbf{B}_d^P + 0.72\mathbf{B}_d^T \end{aligned} \quad (\text{IX.7})$$

Estimation de l'erreur commise : de même que pour le cas de la famille dipôle, la restriction de \mathcal{L}^2 à la base $(\mathbf{B}_d^P, \mathbf{B}_d^T)$ n'est qu'approchée. Ce résultat apparaît lorsqu'on compare les profils des composantes radiale et orthoradiale des champs obtenus à l'ordre 2, à ceux des champs appliqués (figure IX.7). Nous constatons à nouveau que la composante poloïdale obtenue à l'ordre 2 est quasiment colinéaire à \mathbf{B}_q^P (figure IX.7 (a)), alors que le profil de la composante toroïdale de $\mathcal{L}^2\mathbf{B}_q^T$ est en dessous de \mathbf{B}_q^T quel que soit r . Nous avons donc encore une fois surestimé le coefficient M_{TT} , ce qui ne remet pas en question la capacité de l'écoulement à entretenir un champ magnétique.

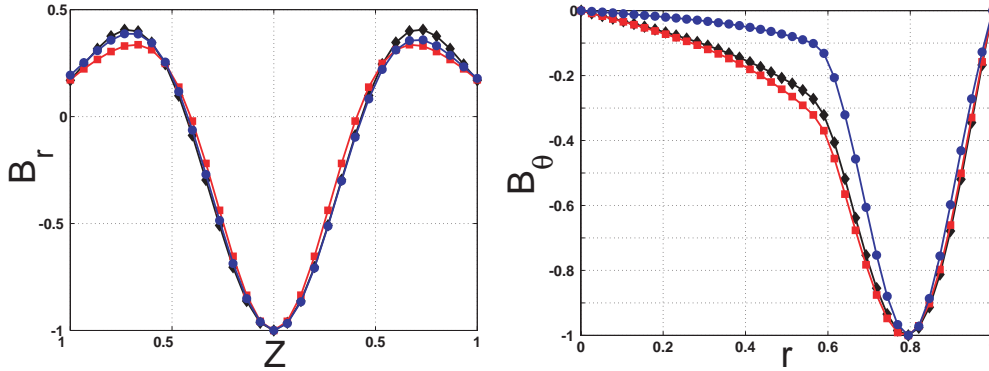


Fig. IX.7: Famille quadrupôle, estimation de l'erreur commise lors de la projection. Figure (a) : profil axial de B_r à une distance $r = 0.8$ de l'axe Oz . Figure (b) : profil radial de B_θ dans le plan $z = -0.4$. (■) : champ appliqué. (◆) Composantes de $\mathcal{L}^2\mathbf{B}_q^P$. (●) Composantes de $\mathcal{L}^2\mathbf{B}_q^T$.

Remarque : nous avons donc observé que l'écoulement ne montre pas de différence flagrante entre le cas du dipôle et le cas du quadrupôle. Ce résultat ne doit pas surprendre puisque les phénomènes physiques concernés, *i.e.* l'expulsion du champ azimuthal ou l'effet alpha, sont les mêmes, que la composante orthoradiale appliquée soit à symétrie dipolaire ou quadrupolaire.

IX.1.3 Mode dipolaire transverse

Jusqu'alors, nous n'avons considéré que des modes axisymétriques. Toutefois, puisque l'écoulement étudié a montré une grande analogie avec l'écoulement de Roberts, il nous est apparu intéressant d'étudier le bouclage d'un mode de type dipôle transverse tel que celui observé dans l'expérience de Karlsruhe. Pour étudier le bouclage de ce mode, nous utilisons la même stratégie que précédemment. Nous appliquons un champ transverse uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ et calculons le champ \mathbf{B}_k obtenu après k itérations.

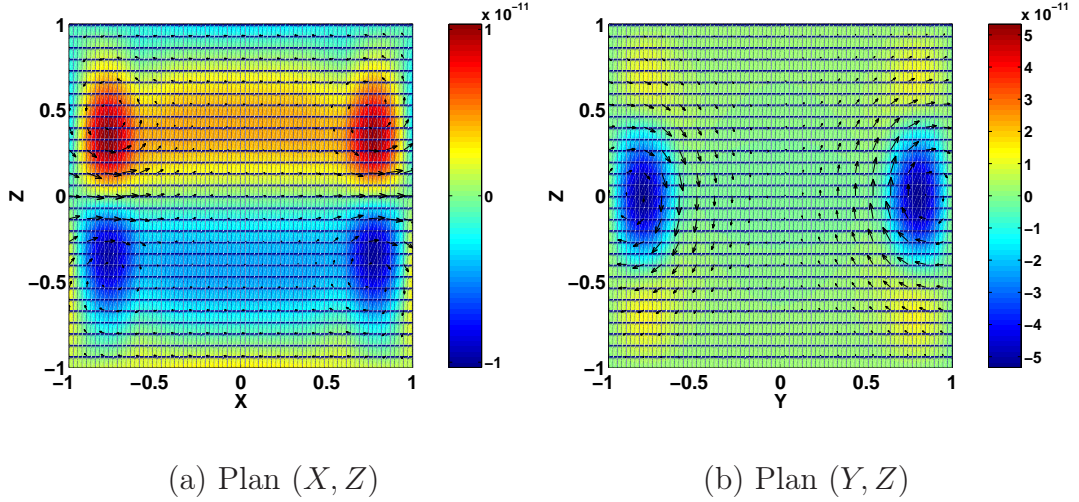


Fig. IX.8: Vue en coupe du mode antidynamo “dipôle transverse”. Figure (a) : coupe dans le plan (Ox, Oz) . Figure (b) : coupe dans le plan (Oy, Oz) .

Nous trouvons que la suite (\mathbf{B}_k) converge rapidement vers une structure stable. Au-delà de 8 itérations, la structure du champ induit n'évolue plus, et les champs \mathbf{B}_k et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_k$ sont colinéaires avec un recouvrement proche de 100%. À nouveau, nous trouvons que le vecteur propre de \mathcal{L}^2 est associé à la valeur propre $\gamma = -1/400$. La figure IX.9 montre une coupe dans les plans $z = 0.5$, $z = 0$ et $z = -0.5$ du vecteur propre \mathbf{B}_8 . Comme nous pouvons le constater, ce champ magnétique rappelle fortement la structure en hélice du mode $\mathbf{B}_\epsilon = \cos(\pi z) \mathbf{e}_x + \epsilon \sin(\pi z) \mathbf{e}_y$ de la dynamo Roberts que nous avons rencontré en section VIII.4. \mathbf{B}_8 possède une composante parallèle Oy , qui se renverse de part et d'autre du plan médian, et est associée à une composante parallèle à Ox dont la dépendance en z ressemble à $\cos(\pi z)$. Toutefois, comme le montrent les figures IX.8 (a) et (b), qui représentent deux coupes de \mathbf{B}_8 dans les plans (Ox, Oz) et (Oy, Oz) , la topologie de \mathbf{B}_8 est un peu plus complexe que celle obtenue dans le cas du système invariant par translation.

En effet, le processus d'induction étant confiné dans un volume borné, la composante B_x (paire en z) est associée à une composante verticale B_z^i impaire de z alors que la composante B_y (impaire en z) est associée à une composante verticale B_z^p paire en fonction de z . Il apparaît donc que le vecteur propre obtenu est toujours la superposition de deux composantes orthogonales, qui possèdent des propriétés de parité opposées, et forment une structure dipolaire transverse. Utilisant ce résultat, nous définissons alors les vecteurs $\mathbf{B}_x^0 = B_x \mathbf{e}_x + B_z^i \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{B}_y^0 = B_y \mathbf{e}_y + B_z^p \mathbf{e}_z$, qui forment la base de type dipôle équatorial sur laquelle nous décomposons l'opérateur \mathcal{L}^2 .

Appliquant deux fois l'opérateur d'induction aux vecteurs de base, nous trouvons dans

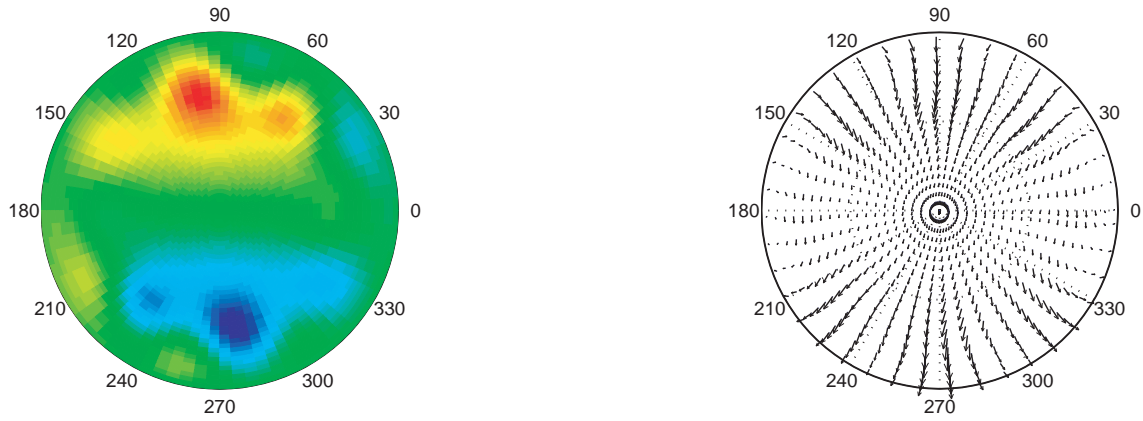
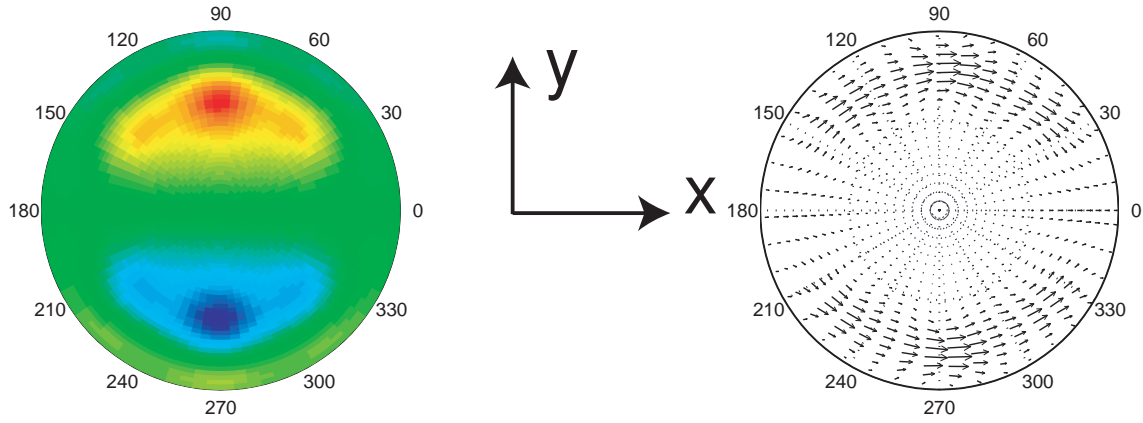
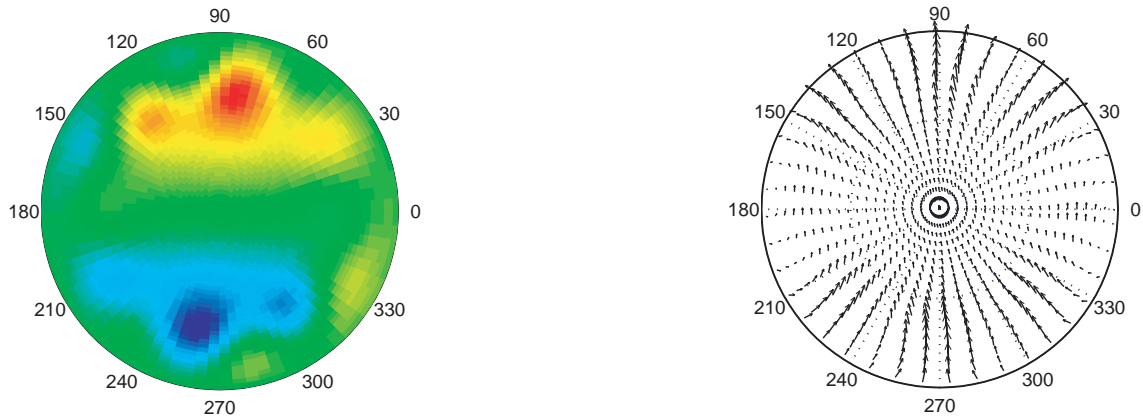
(a) Vue en coupe de \mathbf{B}_8 dans le plan $z = 0.5$ (b) Vue en coupe de \mathbf{B}_8 dans le plan médian(c) Vue en coupe de \mathbf{B}_8 dans le plan $z = -0.5$

Fig. IX.9: Vue en coupe du mode antidynamo “dipôle transverse”. Figure (a) : coupe dans le plan $z = 0.5$. Figure (b) : coupe dans le plan $z = 0$. Figure (c) : coupe dans le plan $z = -0.5$.

ce cas aussi que les champs $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_x^0$ et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_y^0$ peuvent se décomposer comme combinaison linéaire de \mathbf{B}_x^0 et \mathbf{B}_y^0 . La restriction de \mathcal{L}^2 au dipôle transverse s'écrit alors :

$$M = -10^{-4} \begin{pmatrix} 15 & 13 \\ 20 & 14 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.8})$$

Cette matrice possédant une valeur propre positive, $\lambda_+ = 1.610^{-4}$, il apparaît que le dipôle transverse est non seulement une solution qui peut être entretenue par l'écoulement, mais que son seuil $R_m^c \sim 79$ est très proche de celui trouvé pour le quadrupôle. La différence entre les seuils étant très faible, on ne peut pas trancher à ce degré d'approximation entre la nature (transverse ou axiale) du champ magnétique susceptible d'être obtenu. Nous noterons tout de même que le résultat obtenu est cohérent avec les études numériques récentes menées en convection thermique [4], qui ont montré que les diverses solutions pouvaient cohabiter dans une même région des paramètres et éventuellement être métastables. Il est donc difficile de prédire quelle est la nature de la solution qui croît la première dans le régime cinématique lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds magnétique.

IX.2 Mécanisme dynamo pour l'écoulement T1.

IX.2.1 Analyse qualitative

Après l'étude des mécanismes de bouclage possible pour l'écoulement \mathbf{T}_2^1 , nous nous tournons maintenant vers l'écoulement T1 qui prend en compte le caractère antisymétrique du pompage au sein de chaque colonne. Alors que nous avions dans le cas \mathbf{T}_2^1 un pompage axial s'écrivant :

$$V_z^A(r, \theta) = \cos(n\theta) \cos(\pi z), \quad (\text{IX.9})$$

qui était maximal dans le plan médian, le nouvel écoulement présente un pompage axial se renversant de part et d'autre du plan médian puisqu'il s'écrit :

$$V_z^A(r, \theta) = \cos(n\theta) \sin(\pi z). \quad (\text{IX.10})$$

Les écoulements \mathbf{T}_2^1 et T1 possèdent donc de fortes similitudes. En effet, la moitié supérieure ($z > 0$) de l'écoulement T1 est constituée de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 dans un cylindre de hauteur $H = 1$, alors que la moitié inférieure $z < 0$ est constituée de l'écoulement symétrique du premier par réflexion par rapport au plan médian. L'écoulement T1 est donc une superposition de deux écoulements \mathbf{T}_2^1 , d'hélicité opposées, qui constituent chacun un des deux hémisphères. Bien que les symétries des deux écoulements par rapport au plan médian soient différentes, les ingrédients présents dans l'écoulement \mathbf{T}_2^1 se retrouvent dans l'écoulement T1. Nous allons donc prédire la forme des modes recherchés en analysant les symétries du problème. Pour cela, étudions la figure IX.10 qui représente le champ induit à l'ordre 2 par l'écoulement T1 dans le cas d'un champ orthoradial de la forme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_\theta$.

Puisque l'hélicité est négative dans la partie supérieure du cylindre, et positive dans la partie inférieure, nous obtenons à l'ordre 2 deux boucles de courant électrique toroïdales de sens opposé. Ces deux boucles sont donc en configuration de type anti-Helmoltz, et

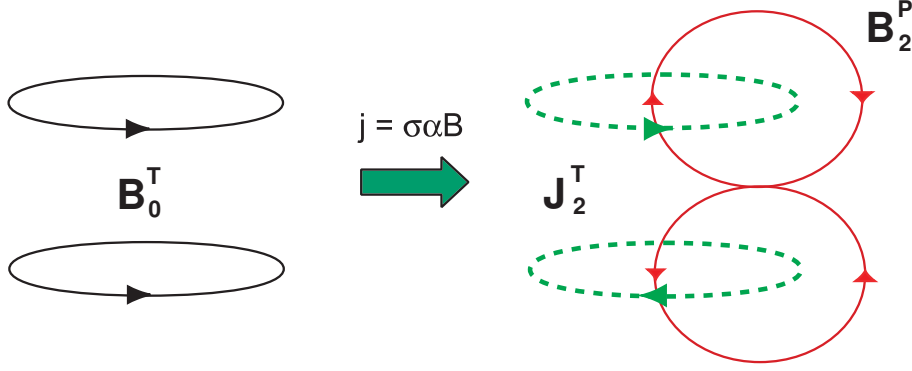


Fig. IX.10: Écoulement \mathbf{T}_1 : symétries du champ induit à l'ordre 2 dans le cas d'un champ appliqué orthoradial indépendant de z . Lignes pointillées : courant électrique \mathbf{J}_2^T . Lignes pleines champs magnétiques \mathbf{B}_0^T et \mathbf{B}_2^P . Pour l'écoulement \mathbf{T}_1 , La partie supérieure ($z > 0$) possède une hélicité négative ($\alpha > 0$), alors que la partie inférieure ($z < 0$) possède une hélicité positive ($\alpha < 0$). Les boucles de courant sont donc en configurations anti-Helmholtz, et produisent un champ quadrupolaire.

génèrent un champ poloïdal \mathbf{B}_2^P quadrupolaire. Alors que pour l'écoulement \mathbf{T}_2^1 , la composante orthoradiale paire était associée à une composante radiale impaire (dipôle), nous observons que dans le cas de l'écoulement \mathbf{T}_1 la composante toroïdale paire est associée à une composante radiale paire de z (quadrupôle). De la même manière, en appliquant un champ orthoradial impair de z , nous aurions deux boucles de courant circulant dans le même sens, et le champ poloïdal aurait été dipolaire. Les deux écoulements présentent donc des mécanismes d'induction analogues, et le caractère antisymétrique du pompage axial change simplement la symétrie des modes observés.

IX.2.2 Bouclage des modes axisymétriques

Mode dipolaire axial : de l'étude des symétries des modes dynamo, nous déduisons qu'en appliquant à l'écoulement \mathbf{T}_1 un champ orthoradial $\mathbf{B}_0 = B_0 \sin(\pi \frac{z}{H}) \mathbf{e}_\theta$, on peut préparer un mode dipolaire par itérations successives de l'opérateur d'induction. Après moyenne azimutale et normalisation, ce mode antidynamo donne alors la base nommée $(\mathbf{B}_d^P, \mathbf{B}_d^T)$ de type "dipôle axial" (figure IX.11 (a) et (c)). Les figures IX.11 (b),(d) montrent une coupe (r, z) des champs $\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T \rangle_\theta$ et $\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P \rangle_\theta$ que l'on obtient en deux étapes à partir des vecteurs \mathbf{B}_d^T et \mathbf{B}_d^P .

Nous observons que quelle que soit la composante initiale, les composantes poloïdale et toroïdale de \mathbf{B}_2 possèdent une structure très proche de celle des vecteurs de base. Ainsi en projetant le résultat sur ces derniers, nous obtenons la matrice :

$$M_d = -10^{-4} \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.11})$$

Celle-ci possède deux valeurs propres négatives $\lambda_1^d = -24 \cdot 10^{-4}$ et $\lambda_2^d = -1.2 \cdot 10^{-4}$, et toute combinaison linéaire des vecteurs de base donne un bouclage négatif. L'écoulement \mathbf{T}_1 ne montre donc pas la capacité d'entretenir un mode dipolaire pour les mêmes paramètres ($d = 0.4$, $n = 4$ et $P = 1.25$) qui sont ceux que nous avons utilisés pour l'étude numérique

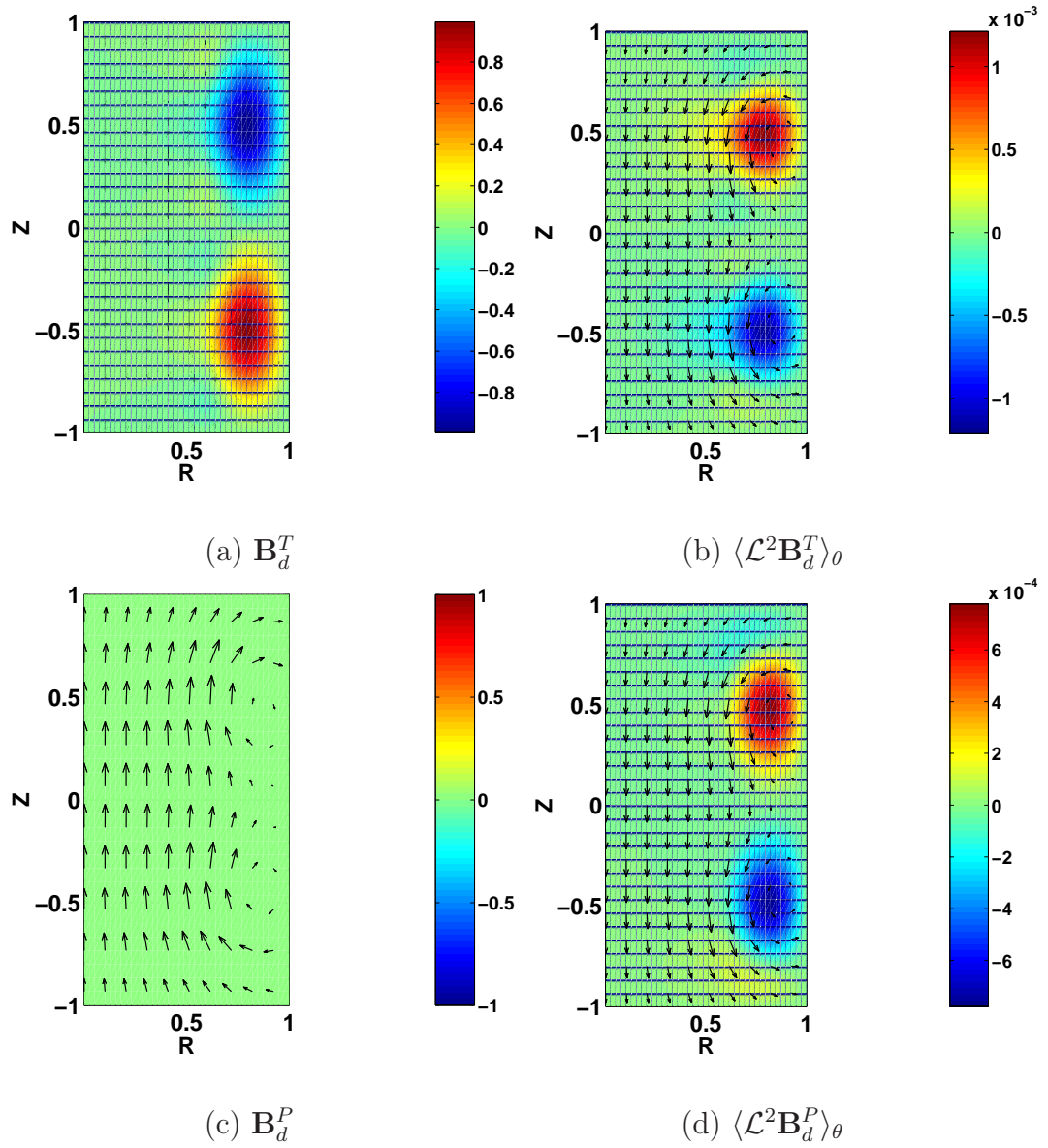


Fig. IX.11: Vecteurs de base de l'espace des dipôles et moyenne angulaire des champs obtenus par application de \mathcal{L}^2 aux vecteurs \mathbf{B}_d^T et \mathbf{B}_d^P .

de $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$.

Mode quadrupolaire Pour étudier le bouclage du mode à symétrie quadrupolaire, nous appliquons un champ possédant les symétries du quadrupôle. Nous avons testé plusieurs champs possédant les caractéristiques requises : un champ orthoradial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_\theta$ pair de z , et un champ radial de la forme $\mathbf{B}_0 = B_0 \frac{a}{r} \cos(\pi z) \mathbf{e}_r$. Nous avons observé qu'ils conduisent tous deux après une dizaine d'itérations à un champ ayant la même structure. Les figures IX.12 (a),(c) représentent les composantes \mathbf{B}_q^T et \mathbf{B}_q^P utilisées pour définir la base de type quadrupôle sur laquelle nous projetons l'opérateur \mathcal{L}^2 . Après projection des champs obtenus à l'ordre 2, on obtient la matrice :

$$M_q = -10^{-4} \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 9.1 & 9.4 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.12})$$

qui possède, elle aussi, deux valeurs propres $\lambda_1^q = -20.10^{-4}$ et $\lambda_2^q = -0.2.10^{-4}$ qui sont négatives. On ne trouve donc pas non plus de mode quadrupolaire pouvant être entretenu par l'écoulement, et il semble donc que dans le régime de paramètres choisi ($\max(V^R) = 0.84$ et $\max(V^A) = 0.53$), l'expulsion l'emporte toujours sur l'effet α . Toutefois, dans le cas du quadrupôle, la valeur λ_2 est trouvée suffisamment proche de zéro pour que l'on puisse espérer observer l'entretien du quadrupôle lorsqu'on augmente l'intensité du pompage par rapport à celle de la rotation.

IX.2.3 Bouclage du mode $m = 1$

Dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$, nous avons obtenu un mode dynamo de type "dipôle transverse" par itérations successives. Nous avons alors observé que celui-ci était encore composé de la superposition de deux composantes possédant des symétries incompatibles. Nous avons alors utilisé ces différences de parité pour séparer les deux composantes, et ainsi obtenir les vecteurs de base.

Dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}1$, lorsqu'on itère l'opérateur d'induction à partir d'un champ initial ayant les symétries du dipôle transverse, on trouve bien que la suite (\mathbf{B}_k) converge vers un vecteur propre antidynamo de \mathcal{L}^2 . Toutefois il semble constitué en fait de deux dipôles transverses tournés de 90° l'un par rapport à l'autre, qui possèdent des topologies très voisines et les mêmes propriétés de parité. Nous n'avons donc pas réussi, dans ce cas, à construire deux modes pouvant être retrouvés après action de \mathcal{L}^2 . Ce résultat se comprend lorsqu'on réalise que pour l'écoulement $\mathbf{T}1$, nous avons observé que les deux composantes axisymétriques \mathbf{B}^P et \mathbf{B}^T possèdent les mêmes propriétés de parité. Il apparaît donc que pour les modes axisymétriques, nous avons pu utiliser la même approche que pour $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ uniquement parce que les composantes sont orthogonales, et chacune séparément à divergence nulle.

IX.3 Évolution en fonction de la vitesse

Dans les parties précédentes, et quel que soit l'écoulement considéré, nous avons basé notre analyse dynamo sur la diagonalisation de la matrice M . Celle-ci représente l'opérateur \mathcal{L}^2 dans la base considérée pour une géométrie fixée ($R = 1$, $H = 2$, $n = 4$ et $e = 0.4$)

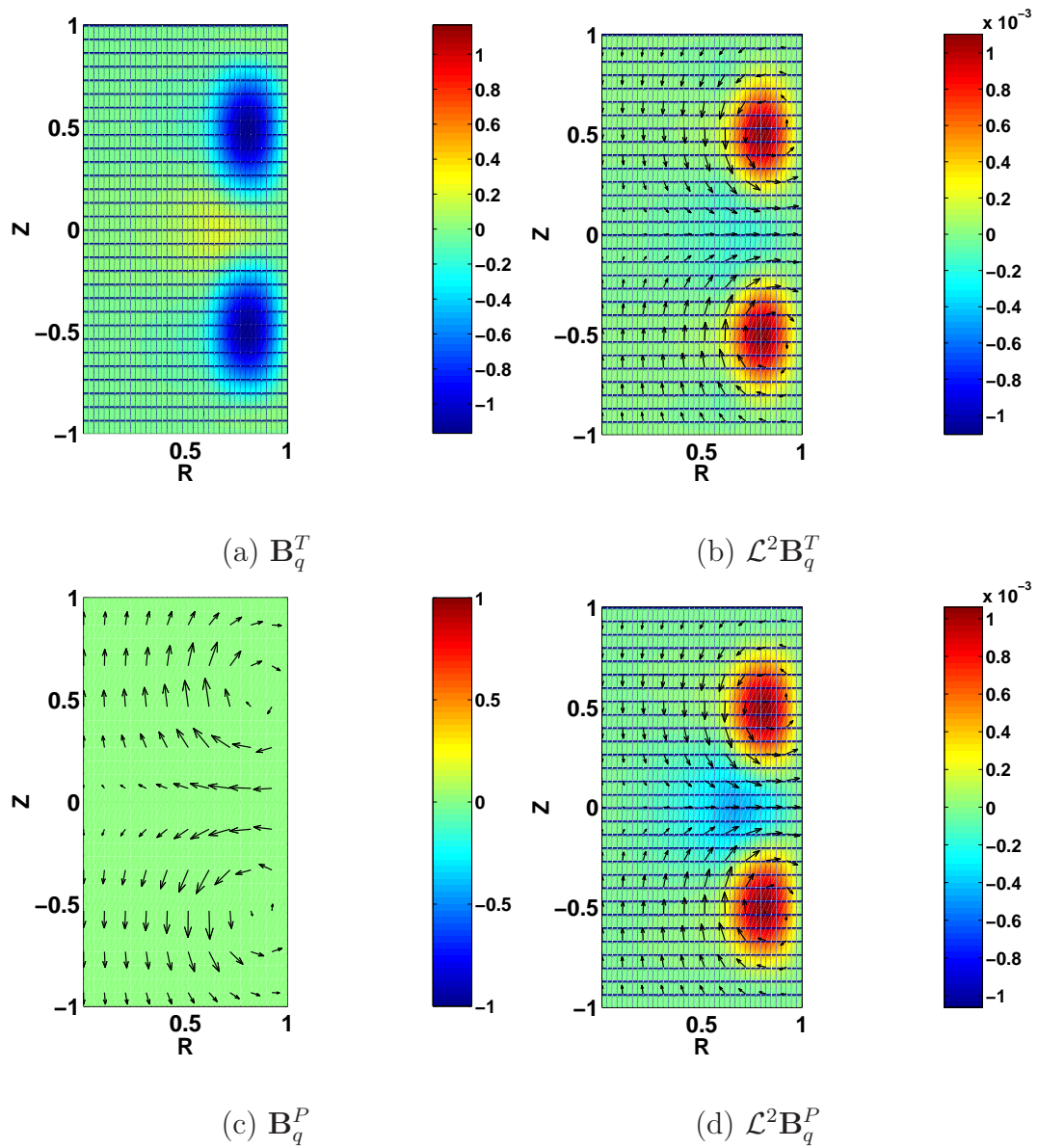


Fig. IX.12: Mode quadrupolaire : champs axisymétriques obtenus par application de \mathcal{L}^2 aux vecteurs \mathbf{B}_q^T et \mathbf{B}_q^P .

et une combinaison particulière des composantes de pompage et de rotation ($P = 1.25$ et $R_m = 1$, soit $\max(V^R) = 0.84$ et $\max(V^A) = 0.53$). Nous cherchons dans cette section à rendre les résultats obtenus plus généraux, en particulier vis-à-vis d'une variation de l'amplitude des composantes de rotation et de pompage. Pour cela normalisons tout d'abord, à géométrie fixée, les composantes de rotation et de pompage sur leur valeur maximale. On peut alors réécrire la vitesse comme $\mathbf{V} = V_A \mathbf{v}^A + V_R \mathbf{v}^R$, avec $\max(\mathbf{v}^A) = 1$ et $\max(\mathbf{v}^R) = 1$. Notons alors \mathcal{L}_A l'opérateur d'induction lorsqu'il n'y a pas de rotation et \mathcal{L}_R l'opérateur d'induction lorsque le pompage est absent. Ces deux opérateurs ne dépendent alors plus que de la géométrie et dans le cas le plus général, \mathcal{L} s'écrit comme la combinaison linéaire :

$$\mathcal{L} = V_A \mathcal{L}_A + V_R \mathcal{L}_R. \quad (\text{IX.13})$$

Nous pouvons donc écrire l'opérateur \mathcal{L}^2 comme une forme quadratique des variables V_A et V_R puisque l'on peut écrire :

$$\mathcal{L}^2 = V_A^2 \mathcal{L}_A \mathcal{L}_A + V_A V_R (\mathcal{L}_R \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_A \mathcal{L}_R) + V_R^2 \mathcal{L}_R \mathcal{L}_R \quad (\text{IX.14})$$

Cette relation montre donc que les quatre éléments de matrice M_{ij} s'écrivent dans la base particulière considérée comme une forme quadratique de V_A et V_R . On a alors

$$M_{ij} = a_{ij} V_A^2 + b_{ij} V_R V_A + c_{ij} V_R^2. \quad (\text{IX.15})$$

Toutefois nous avons vu lors de l'étude des mécanismes d'induction que les deux principaux effets (l'effet α et l'expulsion) ne présentaient pas les mêmes symétries dans un renversement du pompage ($V_A \rightarrow -V_A$), ou lors d'un renversement du sens de rotation ($V_R \rightarrow -V_R$). Plus précisément, nous avons observé que les effets de l'expulsion sont invariants lors de tels renversements alors que l'effet α se transforme comme le produit $V_A V_R$. On peut alors réduire le degré de complexité de la matrice qui s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$M(V_R, V_A) = \begin{pmatrix} aV_R^2 + bV_A^2 & cV_R V_A \\ dV_R V_A & eV_R^2 + fV_A^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.16})$$

Elle ne dépend donc que de 6 coefficients qui sont fonction uniquement des paramètres géométriques du problème.

Diagramme d'existence des modes pour $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$: pour étudier le domaine d'existence des différentes solutions dynamo observées pour $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$, nous avons alors utilisé la décomposition IX.14. Pour chacune des trois familles, nous avons alors calculé les vecteurs $\mathcal{L}_A^2 \mathbf{B}^P$, $(\mathcal{L}_R \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_A \mathcal{L}_R) \mathbf{B}^P$, $\mathcal{L}_R^2 \mathbf{B}^P$, $\mathcal{L}_A^2 \mathbf{B}^T$, $(\mathcal{L}_R \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_A \mathcal{L}_R) \mathbf{B}^T$, $\mathcal{L}_R^2 \mathbf{B}^T$, et les avons projetés sur les vecteurs de base pour obtenir les coefficients géométriques qui définissent la matrice $M(V_A, V_R)$. Nous avons alors obtenu a posteriori que dans chaque cas, la matrice M prend la forme décrite par la relation IX.16. L'ensemble des résultats obtenus pour $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ est alors contenu dans les trois matrices suivantes :

Dipôle axial :

$$M_{\text{dip}}(V_A, V_R) = -10^{-4} \begin{pmatrix} 22V_A^2 + 6V_R^2 & 46V_A V_R \\ 18V_A V_R & 14(V_A^2 + V_R^2) \end{pmatrix} \quad (\text{IX.17})$$

Quadrupôle axial :

$$M_{\text{quad}}(V_A, V_R) = -10^{-4} \begin{pmatrix} 23V_A^2 + 5V_R^2 & 25V_A V_R \\ 25V_A V_R & 11(V_A^2 + V_R^2) \end{pmatrix} \quad (\text{IX.18})$$

Dipôle transverse :

$$M_{\text{trans}}(V_A, V_R) = -10^{-4} \begin{pmatrix} 22V_A^2 + 13V_R^2 & 29V_A V_R \\ 46V_A V_R & 16V_A^2 + 14V_R^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.19})$$

Disposant alors de la restriction de $\mathcal{L}^2(V_A, V_R)$ aux trois bases considérées, nous avons donc accès aux deux valeurs propres λ_{\min} et λ_{\max} en fonction des amplitudes du pompage et de la rotation. La figure IX.13 montre le résultat que nous obtenons lorsque nous traçons la plus grande des deux valeurs propres λ_{\max} dans le plan (V_R, V_A) . Pour plus de lisibilité, lorsque λ_{\max} est négative (et donc que le bouclage dynamo est impossible), nous avons fixé la valeur artificiellement à zéro.

Pour chacun des modes considérés, le plan (V_R, V_A) fait apparaître deux régions. La première, pour laquelle λ_{\max} est positif, correspond à la possibilité d'observation de l'instabilité dynamo avec un seuil $R_m^c = 1/\sqrt{\lambda_{\max}}$. La seconde, pour laquelle λ_{\max} est négatif, correspond à l'impossibilité d'instabilité dynamo pour le mode considéré. Les figures (a), (b) et (c) font alors apparaître que les trois modes dynamo coexistent dans une même région de l'espace, qui est située au voisinage de la droite d'équation $V_R = V_A$. Cette localisation de la dynamo n'est pas surprenante puisque lorsque l'une des composantes \mathbf{V}^T ou \mathbf{V}^P est dominante, le mécanisme d'expulsion qu'elle produit est plus important que l'effet α .

Dans la région des paramètres pour laquelle l'instabilité est possible, et pour un même couple de paramètres, on observe que λ_d est toujours inférieur à λ_q . Le quadrupôle est donc toujours favorisé par rapport au dipôle axial. De même, lorsqu'il y a coexistence du quadrupôle et du dipôle transverse, c'est ce dernier qui montre toujours la valeur propre la plus élevée (et donc qui possède le seuil le plus bas). Toutefois le domaine d'existence du quadrupôle est le plus étendu puisque pour ce mode, la valeur propre λ_{\max} reste positive pour des valeurs plus élevées de la rotation.

Le diagramme de prédominance représenté en figure IX.13(d) résume l'ensemble de ces observations. Il montre que le secteur angulaire où l'instabilité est possible se divise en trois régions, une première région où le pompage est dominant et favorise le dipôle équatorial, une seconde où la rotation domine ce qui favorise le quadrupôle, et une troisième région pour laquelle nous n'avons pas pu trancher quant à la prédominance d'une solution particulière.

Diagramme d'existence des modes pour T1 : nous avons effectué la même décomposition que précédemment pour le cas de l'écoulement **T1**. Les résultats généraux restent ici valables et la matrice possède la même forme que dans le cas **T₂¹**. L'opérateur \mathcal{L}^2 restreint aux différentes bases s'écrit alors :

Dipôle axial :

$$M_{\text{dip}}(V_A, V_R) = -10^{-4} \begin{pmatrix} 16V_A^2 + 8V_R^2 & 33V_A V_R \\ 16V_A V_R & 12(V_A^2 + V_R^2) \end{pmatrix} \quad (\text{IX.20})$$

Quadrupôle axial :

$$M_{\text{quad}}(V_A, V_R) = -10^{-4} \begin{pmatrix} 20V_A^2 + 5V_R^2 & 25V_A V_R \\ 20V_A V_R & 11V_A^2 + 8V_R^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.21})$$

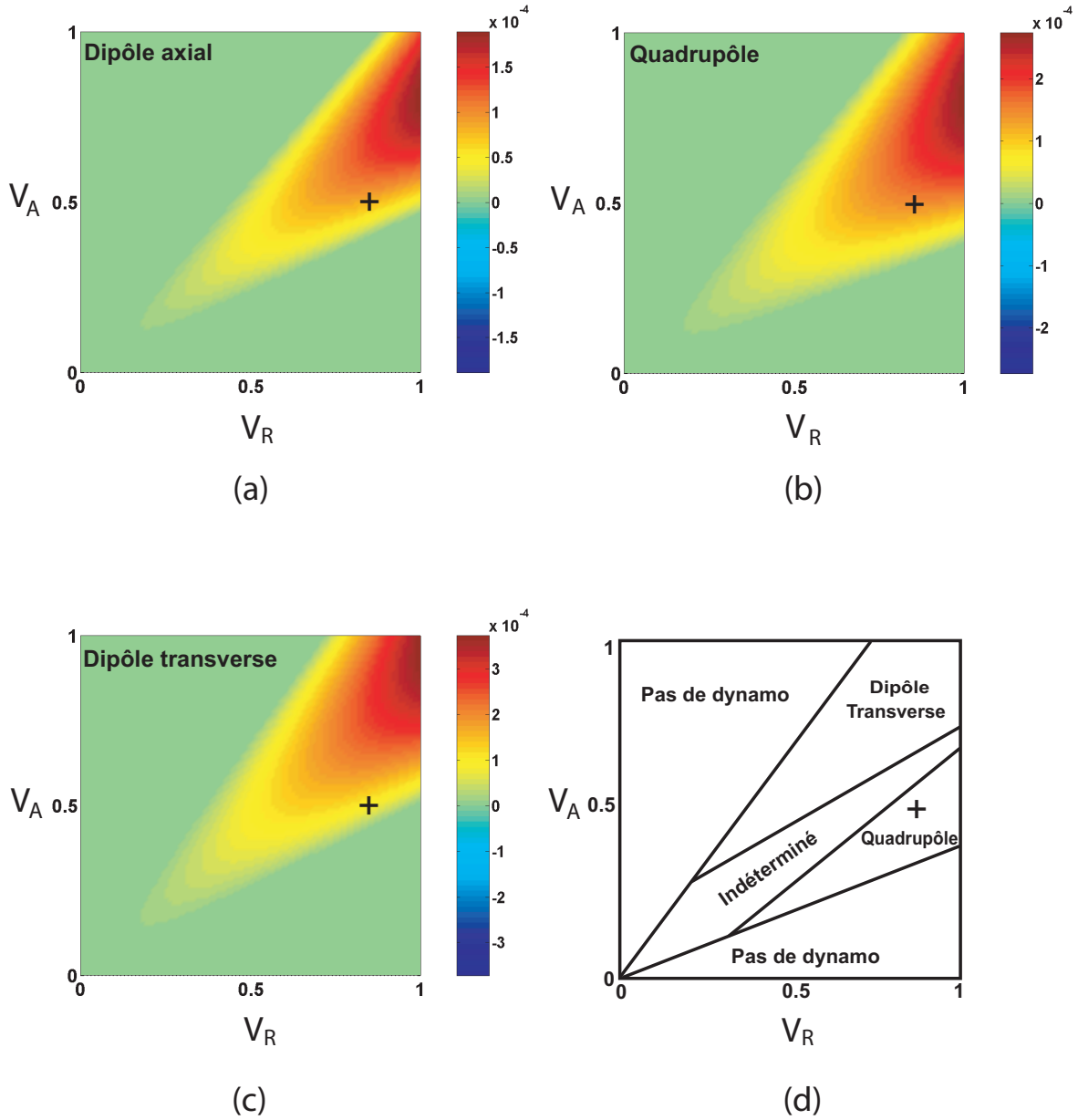


Fig. IX.13: Écoulement \mathbf{T}_2^1 , évolution de la valeur propre λ_{\max} dans le plan (V_R, V_A) . Figure (a) : dipôle axial. Figure (b) : quadrupôle axial. Figure (c) : dipôle transverse. Figure (d) : diagramme de prédominance des différents modes dynamo possibles. Pour la lisibilité, lorsque $\lambda_{\max} \leq 0$, nous avons reporté la valeur zéro sur le graphique. Sur chaque figure, la croix (+) marque le couple de paramètres $(V_R, V_A) = (0.83, 0.53)$ de l'écoulement $\mathbf{T}_2^1(e = 0.4, P = 1.25)$ dont nous avons étudié les mécanismes d'induction et le bouclage.

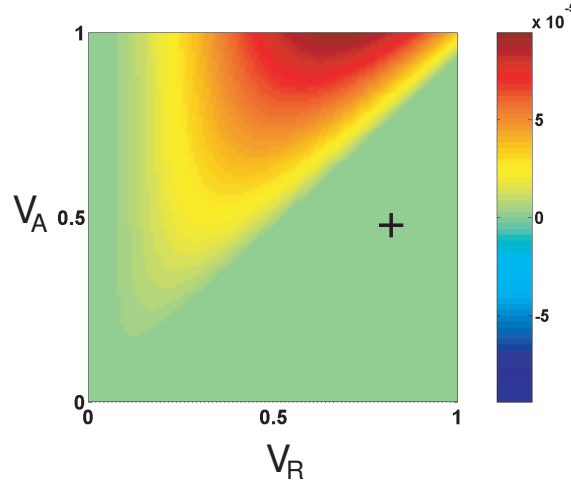


Fig. IX.14: Écoulement **T1**. Évolution de la valeur propre λ_{\max} du quadrupôle axial dans le plan (V_R, V_A) . La croix (+) marque le couple de paramètres $(V_R, V_A) = (0.83, 0.53)$ de l’écoulement **T1** ($e = 0.4, P = 1.25$) dont nous avons étudié le bouclage.

Quelles que soient les valeurs de V_A et V_R , nous trouvons que la matrice M_{dip} ne possède aucune valeur propre positive. Il apparaît donc que dans l’approximation d’ordre 2, l’écoulement **T1** ne peut pas entretenir un dipôle par un mécanisme α^2 . En revanche, comme le montre la figure IX.14, il existe une région de l’espace des paramètres pour laquelle l’entretien du mode quadrupolaire est possible. Il s’agit de la région pour laquelle le pompage est plus intense que la rotation.

Ainsi dans ce système qui possède un pompage antisymétrique, le dipôle n’apparaît plus comme une solution dynamo et semble disparaître au profit du quadrupôle. Malheureusement nous n’avons pu comparer le résultat obtenu au cas du dipôle transverse puisqu’il nous a été impossible d’étendre la méthode de résolution à ce cas.

IX.4 Lien avec le “first order smoothing”

Pour étudier les mécanismes de bouclage, nous avons projeté l’opérateur \mathcal{L}^2 sur des vecteurs de base axisymétriques possédant la symétrie dipolaire ou quadrupolaire. Ce faisant, nous sommes arrivés à la conclusion qu’on pouvait écrire les coefficients de la matrice M comme une fonction des trois variables V_A^2 , $V_R V_A$ et V_R^2 . Ce résultat est à rapprocher de l’étude des symétries du tenseur $[\alpha]$ telle que l’ont pratiquée Avalos, Rädler et Plunian lors de leur étude d’un système similaire par l’approche de type champ moyen [8]. On voit donc que derrière l’écriture sous forme d’opérateurs se cache une approximation quadratique comparable à celle du “champ moyen au premier ordre”. Alors que le travail concernant l’analyse dynamo était largement achevé, il nous est donc apparu important de reprendre le problème à l’envers pour comprendre où se situent les approximations de la méthode que nous avons développée, mais aussi de déterminer la portée des conclusions tirées dans le paragraphe précédent. Revenons pour cela au point de départ de l’étude.

IX.4.1 Retour sur la méthode

Pour trouver le mode neutre et le seuil de l'instabilité, nous devons résoudre l'équation d'induction dans le cas marginalement stable :

$$\Delta \mathbf{B} + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{IX.22})$$

Puisque nous en cherchons un mode axisymétrique, nous séparons le champ magnétique en sa partie non axisymétrique \mathbf{b} et sa partie moyenne $\langle \mathbf{B} \rangle$. Notant que $\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{0}$, on peut séparer l'équation IX.22 en sa partie moyenne et sa partie fluctuante. On obtient alors les équations de base de la théorie de champ moyen :

$$\Delta \langle \mathbf{B} \rangle + R_m \nabla \times \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle = 0 \quad (\text{IX.23})$$

$$\Delta \mathbf{b} + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle) + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B} \rangle) = 0 \quad (\text{IX.24})$$

L'approche de type champ moyen consiste alors à découpler artificiellement le système. Prenant un champ moyen $\langle \mathbf{B}_0 \rangle$, nous obtenons alors le champ fluctuant comme solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{b} + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle) + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}_0 \rangle) = 0 \quad (\text{IX.25})$$

Cette équation ne pouvant se résoudre simplement, on fait généralement l'hypothèse de premier ordre, qui consiste à négliger le terme non linéaire $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle)$ devant $\nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}_0 \rangle)$. La fluctuation est alors solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta \mathbf{b} + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}_0 \rangle) = 0. \quad (\text{IX.26})$$

Cela montre que \mathbf{b} s'identifie avec le champ \mathbf{B}_1 de la méthode itérative lorsque $R_m = 1$. Notant K le noyau de l'équation lorsque $R_m = 1$, et $*$ le produit de convolution, la solution s'écrit formellement :

$$\mathbf{b} = R_m \mathbf{B}_1 = R_m \mathcal{L} \langle \mathbf{B}_0 \rangle = R_m K * \langle \mathbf{B}_0 \rangle \quad (\text{IX.27})$$

N'ayant pas fait l'hypothèse de séparation d'échelle dans la direction radiale, nous n'avons pas fermé le système à l'aide d'une relation constitutive de la forme :

$$\langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle = [\alpha(r, z)] \langle \mathbf{B}_0 \rangle \quad (\text{IX.28})$$

mais avons directement calculé, pour $R_m = 1$, le champ \mathbf{B}_2 comme solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{B}_2 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) = 0 \quad (\text{IX.29})$$

Toutefois, n'ayant gardé que sa partie axisymétrique, nous avons résolu l'équation :

$$\Delta \langle \mathbf{B}_2 \rangle + \nabla \times \langle \mathbf{V} \times (K * \langle \mathbf{B}_0 \rangle) \rangle = 0 \quad (\text{IX.30})$$

Un vecteur propre axisymétrique particulier \mathbf{B}_0 de \mathcal{L}^2 donnant un champ $\mathbf{B}_2 = \gamma \mathbf{B}_0$ est donc solution du problème :

$$\gamma \Delta \langle \mathbf{B}_0 \rangle + \nabla \times \langle \mathbf{V} \times (K * \langle \mathbf{B}_0 \rangle) \rangle = 0 \quad (\text{IX.31})$$

Nous voyons que cette équation s'identifie à l'équation IX.23 lorsque $\mathbf{b} = R_m K * \langle \mathbf{B} \rangle$ et $R_m = 1/\sqrt{\gamma}$.

Nous avons donc obtenu une solution dynamo associée au seuil $R_m^c = 1/\sqrt{\gamma}$ moyennant deux approximations principales :

- la première est l'approximation de séparation d'échelle uniquement le long de la coordonnée azimutale, qui conduit à l'écriture du champ en partie axisymétrique et partie fluctuante.
- La seconde est l'approximation de premier ordre qui nous permet d'obtenir une équation linéaire pour la fluctuation \mathbf{b} . C'est cette hypothèse qui permet d'écrire les coefficients de la matrice M comme une forme quadratique des deux vitesses, et donc d'extrapoler la valeur du seuil à partir du calcul des valeurs propres.

IX.4.2 Au delà de l'approximation d'ordre 2

Lors de l'analyse précédente, nous avons calculé le champ fluctuant $\mathbf{b} = R_m \mathbf{B}_1$, et basé notre analyse du cycle dynamo en projetant $\langle \mathbf{B}_2 \rangle$ sur la base des vecteurs $(\langle \mathbf{B}^P \rangle, \langle \mathbf{B}^T \rangle)$. Nous avons alors pu extrapoler un seuil d'instabilité en utilisant l'approximation quadratique. Or, comme l'ont montré les études des mécanismes d'induction, lorsque qu'on augmente R_m le champ moyen est progressivement expulsé des colonnes et l'effet α sature. Le champ obtenu à l'ordre 2 ne pouvant prétendre décrire correctement la solution de l'équation d'induction lorsque R_m est supérieur à 10, on entrevoit qu'on a sûrement surestimé l'effet α , et donc sous estimé le seuil d'apparition de l'instabilité. Pour corriger ce défaut, et ainsi aller au-delà de l'approximation de premier ordre, il nous faut résoudre l'équation :

$$\Delta \mathbf{b} + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle) + R_m \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B} \rangle) = 0 \quad (\text{IX.32})$$

Décomposons alors la fluctuation en une série entière : $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\infty} R_m^k \mathbf{b}'_k$ et injectons cette expression dans l'équation précédente. En identifiant terme à terme les différentes puissances de R_m , nous obtenons à l'ordre 1 :

$$\Delta \mathbf{b}'_1 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}_0 \rangle) = 0, \quad (\text{IX.33})$$

ce qui montre qu'on a $\mathbf{b}'_1 = \mathbf{B}_1$. Ce champ est composé de l'harmonique $n = 4$ et contribue donc directement à la force électromotrice moyenne pour donner le terme $\langle \mathbf{B} \rangle = R_m^2 \langle \mathbf{B}_2 \rangle$. A l'ordre deux, nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b}'_2 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}'_1 - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b}'_1 \rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta \mathbf{b}'_2 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_1 - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1 \rangle) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IX.34})$$

Cette seconde expression n'est autre que la partie fluctuante de l'équation

$$\Delta \mathbf{B}_2 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) = 0, \quad (\text{IX.35})$$

que nous avons résolue pour effectuer l'analyse du bouclage dans l'approximation d'ordre 2. Nous pouvons alors identifier \mathbf{b}'_2 à \mathbf{b}_2 , et remarquer que \mathbf{b}'_2 est constitué uniquement de l'harmonique $n = 8$. Il ne peut donc pas contribuer directement à la force électromotrice

moyenne et pour obtenir la première correction au champ moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$, il nous faut calculer le champ \mathbf{b}'_3 qui est solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{b}'_3 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}'_2 - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b}'_2 \rangle) = 0 \quad (\text{IX.36})$$

Il est alors composé des harmoniques $n = 4$ et $n = 12$ et peut donc contribuer à la force électromotrice moyenne par le biais du terme $\langle \mathbf{V} \times \mathbf{b}'_3 \rangle$. Il sera donc source d'un champ \mathbf{B}'_4 solution de l'équation

$$\Delta \mathbf{B}'_4 + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}'_3) = 0. \quad (\text{IX.37})$$

Celui-ci donnera une contribution au champ moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$, qui s'écrira pour une troncature à l'ordre 4 :

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{R}_m^2 \langle \mathbf{B}_2 \rangle + \mathbf{R}_m^4 \langle \mathbf{B}'_4 \rangle \quad (\text{IX.38})$$

Ainsi, pour $k \geq 1$, la fluctuation \mathbf{b}'_k s'obtient à partir du champ \mathbf{B}'_{k-1} en ne conservant dans le terme source de l'équation que la partie fluctuante \mathbf{b}'_{k-1} . Il est donc solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{b}'_k + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{k-1} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_{k-1} \rangle) = 0, \quad (\text{IX.39})$$

Il pourra alors agir sur le champ moyen au travers de l'équation :

$$\Delta \mathbf{B}'_{k+1} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}'_k - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b}'_k \rangle) = 0 \quad (\text{IX.40})$$

IX.4.3 Application à l'écoulement \mathbf{T}_2^1

Nous pouvons appliquer cette approche à la famille dipôle dans le cas de l'écoulement \mathbf{T}_2^1 . En appliquant \mathcal{L}^2 aux vecteurs de base, nous avons obtenu à l'ordre 2 les champs $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P$ et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T$ que nous avons écrits (section IX.1.1) :

$$\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P \sim \mathbf{M}_{PP} \mathbf{B}_d^P + \mathbf{M}_{TP} \mathbf{B}_d^T + \mathbf{b}_2^P \quad (\text{IX.41})$$

$$\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T \sim \mathbf{M}_{PT} \mathbf{B}_d^P + \mathbf{M}_{TT} \mathbf{B}_d^T + \mathbf{b}_2^T,$$

où \mathbf{b}_2^P et \mathbf{b}_2^T sont les parties fluctuantes des champs $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P$ et $\mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^T$. Selon l'étude menée au paragraphe précédent, en appliquant deux fois l'opérateur d'induction à la fluctuation \mathbf{b}_2^P , nous obtenons le champ $\mathbf{B}'_{4,P} = \mathcal{L}^2 \mathbf{b}_2^P$ qui représente la première correction à apporter au champ calculé à l'ordre 2. Pour pouvoir comparer les résultats, nous avons tracé en figure IX.15 (a),(b) le champ $\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P \rangle$ (figure (a)) que nous avons obtenu à l'ordre 2 et le champ $\langle \mathbf{B}'_{4,P} \rangle = \langle \mathcal{L}^2 \mathbf{b}_2^P \rangle$ ainsi calculé (figure (b)).

Nous observons contre toute attente que celui-ci possède une structure dipolaire assez semblable à celle de $\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{B}_d^P \rangle$, et qu'il lui est opposé. Bien que le résultat de la projection ne soit qu'approximatif, décomposons tout de même le champ obtenu dans la base dipolaire $(\mathbf{B}_d^P, \mathbf{B}_d^T)$. À la fluctuation \mathbf{b}_4^P près, nous obtenons alors :

$$\langle \mathbf{B}'_{4,P} \rangle = \langle \mathcal{L}^2 \mathbf{b}_2^P \rangle \sim \delta \mathbf{M}_{PP} \mathbf{B}_d^P + \delta \mathbf{M}_{TP} \mathbf{B}_d^T \quad (\text{IX.42})$$

De la même manière, en partant de la fluctuation \mathbf{b}_2^T , nous obtenons le champ $\langle \mathbf{B}'_{4,T} \rangle$ que nous décomposons sous la forme :

$$\langle \mathbf{B}'_{4,T} \rangle \sim \delta \mathbf{M}_{PT} \mathbf{B}_d^P + \delta \mathbf{M}_{TT} \mathbf{B}_d^T \quad (\text{IX.43})$$

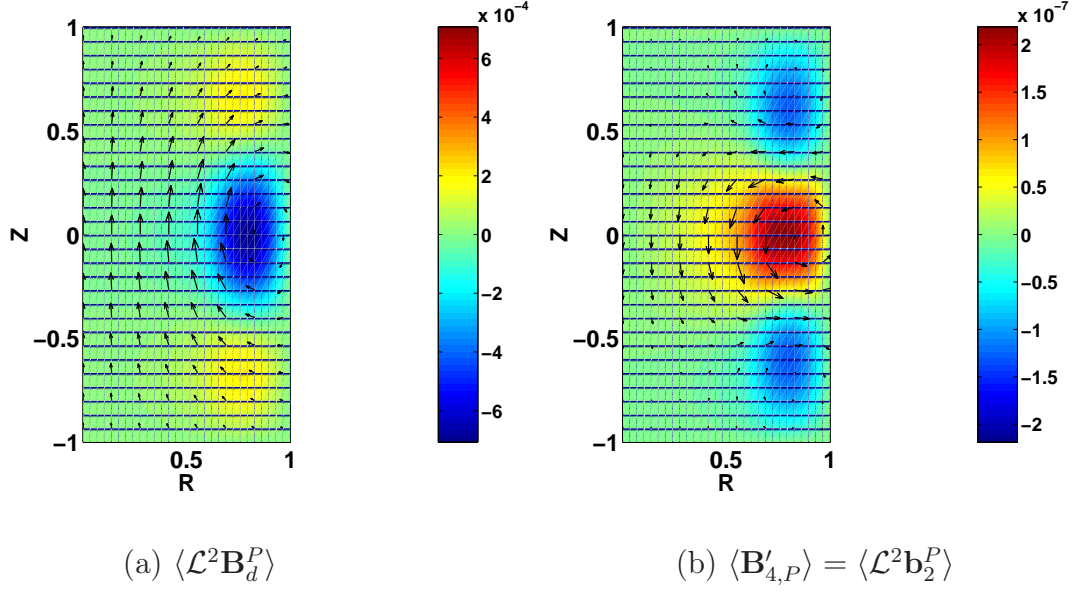


Fig. IX.15: Figure (a) : champ obtenu à l’ordre 2 dans le cas du champ poloïdal \mathbf{B}_d^P . Figure (b) : champ $\langle \mathbf{B}'_{4,P} \rangle = \mathcal{L}^2 \mathbf{b}_2^P$.

Ces deux dernières relations font apparaître que la restriction de \mathcal{L}^2 à la base des dipôle ne s’écrit plus comme une matrice M proportionnelle à R_m^2 , mais comme la superposition de la matrice M , et d’une matrice δM proportionnelle à R_m^4 . Et puisque tous les coefficients de M sont négatifs, et que ceux de δM sont tous positifs, la matrice prend la forme :

$$M'(R_m) = -R_m^2 \begin{pmatrix} | M_{PP} | & -R_m^2 | \delta M_{PP} | & | M_{PT} | & -R_m^2 | \delta M_{PT} | \\ | M_{TP} | & -R_m^2 | \delta M_{TP} | & | M_{TT} | & -R_m^2 | \delta M_{TT} | \end{pmatrix} \quad (\text{IX.44})$$

L’ajout du terme d’ordre supérieur diminue donc à la fois l’effet α et l’expulsion lorsque R_m augmente. Ce résultat avait déjà été observé par F. Pétrélis [78] qui a calculé la correction au tenseur $[\alpha]$ à cet ordre d’approximation dans le cas de l’écoulement de Roberts.

En écrivant le problème dynamo sous la forme matricielle, l’analyse dynamo consiste alors à trouver un R_m , et un vecteur propre \mathbf{B} tel que $\mathbf{B} = M'(R_m)\mathbf{B}$. Le seuil dynamo est donc atteint lorsqu’on trouve une valeur propre de $M'(R_m)$ égale à 1. On s’attend donc à retrouver sur cet exemple que la première correction au seuil est quadratique en R_m . Toutefois cette conclusion est erronée car la correction d’ordre 4 apportée n’est pas petite devant le terme d’ordre 2. En effet, dans le cas de la famille dipôle, et pour l’écoulement \mathbf{T}_2^1 , les matrices M et δM s’écrivent :

$$M = -10^{-4} \begin{pmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \quad \delta M = 10^{-6} \begin{pmatrix} 0.28 & 0.23 \\ 0.22 & 0.19 \end{pmatrix} \quad (\text{IX.45})$$

Comparant alors l’ordre de grandeur des coefficients de δM à ceux de M , nous observons que le calcul à l’ordre 4 ne nous est d’aucun secours. En effet, pour l’analyse du problème non perturbé, nous avons trouvé un seuil égal à 100. Injectant ce résultat dans la relation précédente, nous trouvons que $R_m^2 \delta M$ domine très largement la matrice M . Nous sommes donc dans le cas où la perturbation n’est pas négligeable devant le résultat obtenu initialement, et pour résoudre correctement le problème, il faudrait calculer les contributions

suivantes et resommer la série avec les approximants de Padé. Nous obtiendrions alors une matrice dont les quatre coefficients sont des fonctions de R_m . Cette approche serait alors comparable à celle développée par Rädler *et al* [84] lors de la confrontation de la théorie de champ moyen aux résultats de l'expérience de Karlsruhe.

N'étant intéressés que par une estimation de la validité des approximations que nous avons faites, nous ne nous sommes pas lancés dans un travail fastidieux qui n'aurait rien apporté de plus à la compréhension physique du problème.

IX.5 Conclusion

En mettant en oeuvre la simulation itérative dans les cas des deux écoulements $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{T}1$, nous avons observé qu'on peut convertir un champ toroïdal \mathbf{B}^T en un champ poloïdal \mathbf{B}^P (et vice versa) par un mécanisme d'ordre 2 analogue à l'effet α . Nous avons de plus observé que la nature bornée du mouvement, associée à la répartition des colonnes le long d'un anneau, introduit un mécanisme d'induction quadratique qui tend à expulser les deux composantes transverses aux vortex.

Notant l'analogie avec le cas de la dynamo de Roberts, la méthode itérative nous a permis de projeter l'opérateur \mathcal{L}^2 sur des sous-espaces de dimension 2, stables par \mathcal{L}^2 , et dont les vecteurs de base ($\mathbf{B}^P, \mathbf{B}^T$) sont les familles dipôle et quadrupôle. Cette approche, qui réduit l'analyse de stabilité linéaire à la diagonalisation d'une matrice 2×2 , fait apparaître que le seuil de l'instabilité est donné par la compétition entre l'effet α et le mécanisme d'expulsion. Dans l'approximation quadratique, nous avons alors pu déterminer dans quelle région des paramètres il est possible d'entretenir les modes axisymétriques dipolaire et quadrupolaire.

- Dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}_{\frac{1}{2}}$, nous avons observé que lorsque l'amplitude de la rotation est comparable à celle du pompage, on peut entretenir les deux modes axisymétriques dipolaire et quadrupolaire avec des seuils voisins de $R_m^c = 100$. Nous avons de plus observé que le dipôle transverse peut aussi être entretenu par l'écoulement, ce qui renforce encore le lien entre notre écoulement et l'écoulement de la dynamo de Karlsruhe.
- Dans le cas de l'écoulement $\mathbf{T}1$, nous avons observé qu'il est toujours possible d'entretenir le mode axisymétrique quadrupolaire à condition que l'amplitude du pompage soit plus grande que celle de la rotation. En revanche, aucune valeur du couple des paramètres (V_A, V_R) ne permet d'observer un bouclage positif pour le dipôle axial qui présente une conversion poloïdal \rightarrow toroïdal trop faible pour contrebalancer la forte expulsion du champ azimuthal.

Lors de nos études, nous avons cherché à cerner les approximations de notre méthode. Cela nous a permis de comprendre quel est le lien entre celle-ci et l'approche de type champ moyen au premier ordre. Nous avons alors mis en évidence que les résultats obtenus lors de l'analyse dynamo doivent être considérés comme qualitatifs. Toutefois, puisque nos écoulements montrent une grande analogie avec l'écoulement dynamo de Karlsruhe, nous pouvons espérer être dans le cas favorable où la prise en compte des termes correctifs ne rend pas caduc l'analyse dynamo [84]. On peut alors extrapoler les résultats obtenus pour tirer quelques renseignements concernant la possibilité d'un cycle dynamo de type

α^2 pour la dynamo terrestre, qui serait basé sur l'hélicité de la rotation des colonnes de Busse et sur le pompage d'Ekman.

En effet, dans toutes nos études, nous avons observé que le bouclage positif nécessite une rotation et un pompage du même ordre de grandeur. Or dans le noyau de la Terre, le pompage d'Ekman doit être petit devant la rotation des colonnes puisque le nombre d'Ekman E est de l'ordre de 10^{-15} [68]. Notre système simple met donc ici en doute la possibilité d'une dynamo α^2 basée sur le pompage d'Ekman, et il faut chercher ailleurs l'origine du champ terrestre. Il y a alors deux ingrédients, que nous n'avons pas pris en compte dans notre modèle, qui pourraient être incorporés pour rendre le système un peu plus réaliste.

- L'effet β : le pompage d'Ekman n'est pas la seule vitesse axiale qui brise la contrainte de Taylor, et il existe un autre écoulement de recirculation dont l'origine se situe dans la courbure de l'interface noyau-manteau. C'est l'effet β , qui donne une composante axiale impaire de z , d'amplitude comparable à celle de la rotation, mais qui est en phase avec la composante radiale de la vitesse et non avec la vorticité. Il serait possible de la modéliser en déphasant le pompage axial de l'écoulement **T1** d'un quart de période par rapport à la composante de rotation. Toutefois l'écoulement obtenu ne poss  derait alors plus d'hélicité cinétique, et ne donnerait plus lieu à la conversion polo  idal \leftrightarrow toro  idal qui produit la dynamo. Comme l'ont montré Schaeffer et Cardin dans un écoulement de Couette sphérique [91], on retrouverait un effet α stationnaire en prenant en compte le caractère ondulatoire de l'écoulement, qui se propage dans la direction azimutale [90].

Pour étudier ce cas, il serait alors nécessaire d'étendre la méthode itérative au cas d'une dépendance temporelle sinusoïdale, ce qui est compatible avec le schéma de résolution des équations de Poisson.

- La rotation différentielle : nous savons qu'en convection développée, il apparaît un écoulement azimutal axisymétrique, nommé vent zonal [5, 46], qui peut aider à assurer la conversion $B_r \rightarrow B_\theta$ sous l'action du gradient radial de la rotation $\partial_r V_\theta$. En présence de cet ingrédient, le mécanisme d'entretien du champ magnétique pourrait alors être de type α^2 dans le cas des faibles rotations, ou encore de type $\alpha - \Omega$ lorsque le vent zonal est important. Celui-ci pourrait être aisément modélisé par l'ajout d'une composante $\mathbf{V}_{zonal} = V(r, z)\mathbf{e}_\theta$, ce qui ne poserait pas de problème particulier lors de l'étude des mécanismes d'induction. Sa prise en compte était même l'un des objectifs que nous nous étions fixé au départ de l'étude des mécanismes d'induction. Toutefois, l'étude des mécanismes d'induction sans rotation nous aura emmenés bien au-delà du but initialement fixé puisque nous avons réussi à l'adapter pour étudier les conditions d'apparition de l'instabilité. Il s'est alors naturellement avéré que l'on ne peut pas tout faire, et la possibilité d'un séjour expérimental en Russie, alliée au démarrage tant attendu de l'expérience VKS2 auront eu raison de l'étude de l'influence du vent zonal.

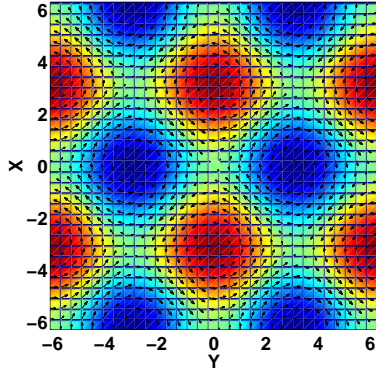
Annexe : effet dynamo dans l'écoulement de Roberts.

L'écoulement de Roberts.

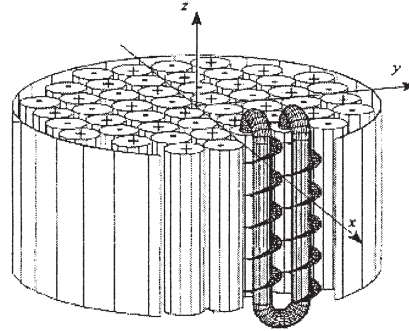
L'écoulement de Roberts [88], dont nous allons étudier les mécanismes d'induction, appartient à la famille des écoulements dits *ABC*. Il a été étudié du point de vue des effets MHD par G.O. Roberts en 1972. Nous l'écrivons en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\mathbf{V} = V_0 \begin{pmatrix} \sin(ky) \\ \sin(kx) \\ \cos(kx) - \cos(ky) \end{pmatrix} \quad (\text{IX.46})$$

Le champ de vitesse est donc périodique selon les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y , indépendant de la coordonnée verticale, et possède une moyenne spatiale nulle. Comme le montre la figure IX.16 (a), l'écoulement est la superposition de deux écoulements indépendants. Le premier, nommé $\mathbf{V}^R = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y$ est un écoulement de rotation organisé en une juxtaposition de vortex contrarotatifs. Le second nommé $\mathbf{V}^A = V_z \mathbf{e}_z$ consiste en un pompage axial, qui se renverse d'une colonne à l'autre, et dont l'amplitude maximale correspond aux valeurs nulles de \mathbf{V}^R .



(a) Écoulement de Roberts



(b) Schéma de l'expérience de Karlsruhe

Fig. IX.16: Figure (a) : champ de vitesse de l'écoulement de Roberts. La vitesse verticale est en phase avec la vorticité de chaque colonne, conférant à l'ensemble un caractère hélicoïdale. Figure (b) : représentation schématique de la structure en colonne de l'écoulement utilisé pour l'expérience dynamo de Karlsruhe.

Cette structure en cellules avec un pompage axial en phase avec la vorticité $\nabla \times \mathbf{V}^R$ des colonnes lui confère une hélicité moyenne non nulle qui vaut :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{k^2}{4\pi^2} \iint_{(x,y) \in [0, 2\pi/k]^2} \mathbf{V} \cdot \nabla \times \mathbf{V} dx dy = 2kV_0^2. \quad (\text{IX.47})$$

L'approximation de champ moyen au premier ordre.

Nous nous intéressons à une situation analogue à celle de l'expérience de Karlsruhe figure (IX.16 (b)). L'écoulement que l'on considère est constitué d'une cinquantaine de colonnes enfermées dans une boîte cubique dont la longueur L est beaucoup plus grande que la largeur $l = 2\pi/k$ d'une seule colonne. La question est alors de trouver la condition d'apparition d'un champ magnétique à l'échelle de la taille de l'expérience. On cherche donc à obtenir un champ magnétique moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$ à partir d'un écoulement de moyenne nulle, dans un système qui présente une séparation d'échelle dans les directions Ox et Oy . L'approche la plus classique consiste à séparer le champ magnétique \mathbf{B} en sa partie moyenne $\langle \mathbf{B} \rangle$, et sa partie fluctuante \mathbf{b} . Notant λ la diffusivité magnétique, et puisque $\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{0}$, l'équation d'induction se sépare en deux équations couplées qui font intervenir à la fois la composante grande échelle, et la fluctuation \mathbf{b} . On obtient :

$$\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = \lambda \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \nabla \times \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle \quad (\text{IX.48})$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \lambda \Delta \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle) + \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (\text{IX.49})$$

L'approche de type champ moyen [64, 50, 45] vise alors à obtenir une relation de fermeture pour la force électromotrice moyenne $\mathbf{e} = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle$. Pour exprimer \mathbf{e} , on découpe artificiellement le système, et on calcule la fluctuation engendrée par l'écoulement lorsqu'on lui applique un champ moyen $\langle \mathbf{B}^0 \rangle$. Celle-ci est solution de l'équation :

$$\partial_t \mathbf{b} = \lambda \Delta \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle) + \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}^0 \rangle), \quad (\text{IX.50})$$

qui est difficile à résoudre dans le cas général. Toutefois dans la limite des faibles R_m , pour laquelle \mathbf{b} reste faible en module devant \mathbf{B} , on peut négliger le terme non linéaire $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle)$ devant $\nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}^0 \rangle)$. Dans cette approximation de "first order smoothing", la fluctuation est alors solution de l'équation de Poisson :

$$\partial_t \mathbf{b} = \lambda \Delta \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \langle \mathbf{B}^0 \rangle). \quad (\text{IX.51})$$

De plus comme l'échelle de variation L de $\langle \mathbf{B}^0 \rangle$ est grande comparée à l qui est celle de la fluctuation, on peut considérer que le champ moyen est constant dans l'équation IX.51. Dans le régime stationnaire \mathbf{b} , est alors solution de l'équation :

$$\Delta \mathbf{b} = -\frac{1}{\lambda} (\langle \mathbf{B}^0 \rangle \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (\text{IX.52})$$

En appliquant ce résultat au cas de l'écoulement de Roberts, la fluctuation s'écrit alors :

$$\mathbf{b} = \frac{V_0}{\lambda k} \begin{pmatrix} \cos(ky) \langle B_x^0 \rangle \\ \cos(kx) \langle B_y^0 \rangle \\ -\sin(kx) \langle B_x^0 \rangle - \sin(ky) \langle B_y^0 \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{IX.53})$$

On obtient ainsi une relation matricielle entre la force électromotrice $\mathbf{e} = \langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle$ et champ appliqué à grande échelle $\langle \mathbf{B}^0 \rangle$. Elle s'écrit :

$$\langle \mathbf{V} \times \mathbf{b} \rangle = [\alpha] \langle \mathbf{B}^0 \rangle = -\frac{V_0^2}{\lambda k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle \mathbf{B}^0 \rangle \quad (\text{IX.54})$$

En appliquant un champ à grande échelle $\langle \mathbf{B}_\perp \rangle$ dans une direction transverse aux colonnes on obtient donc, à l'ordre 2, une force électromotrice moyenne parallèle au champ appliqué. Son signe est déterminé par le signe de l'hélicité de l'écoulement puisqu'on a la relation

$$\mathbf{e} = -\frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{2\lambda k^2} \langle \mathbf{B}_\perp \rangle \quad (\text{IX.55})$$

Détermination du seuil d'apparition de l'instabilité dynamo.

Une fois obtenue la relation de fermeture $\mathbf{e} = -\frac{V_0^2}{\lambda k} \langle \mathbf{B}_\perp \rangle$, on peut l'utiliser pour prévoir le seuil d'apparition de l'instabilité. Injectant cette relation dans l'équation IX.48, $\langle \mathbf{B} \rangle$ est alors solution de :

$$\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = \lambda \Delta \langle \mathbf{B} \rangle + \nabla \times [\alpha] \langle \mathbf{B} \rangle \quad (\text{IX.56})$$

On peut chercher la condition d'instabilité pour un mode en hélice de la forme :

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}, t) = e^{pt} (\cos(Kz) \mathbf{e}_x + \epsilon \sin(Kz) \mathbf{e}_y), \text{ avec } \epsilon = \pm 1 \quad (\text{IX.57})$$

Celui-ci vérifie la relation de dispersion :

$$p = -\lambda K^2 + \epsilon K \frac{V^2}{\lambda k}, \quad (\text{IX.58})$$

qui montre la croissance exponentielle du mode $\mathbf{B}_+ = \cos(Kz) \mathbf{e}_x + \sin(Kz) \mathbf{e}_y$ dès lors que $V_0^2/(\lambda^2 k K) \geq 1$. Toutefois la valeur de K ne peut pas être quelconque, puisque le champ magnétique à grande échelle doit au moins varier à l'échelle de l'expérience. On en déduit que le mode qui croît en premier lorsqu'on augmente la vitesse est celui pour lequel $K = 2\pi/L$. Il est associé au seuil :

$$R_m^c = \frac{V_0 \sqrt{lL}}{\lambda} = 2\pi \quad (\text{IX.59})$$

Remarque : nous avons retrouvé lors de l'étude de ce cas d'école que la structure hélicitaire de l'écoulement permet d'obtenir une force électromotrice parallèle au champ appliqué lorsque celui-ci est orthogonal aux vortex. Nous avons de plus retrouvé que dans l'approximation de champ moyen au premier ordre, le champ magnétique qui croît à grande échelle est le mode transverse hélicoïdal, dont l'hélicité est de signe opposé à celle de l'écoulement. Enfin nous avons observé qu'à la solution dynamo qui croît exponentiellement, est associée une solution antidynamo ($p < 0$) qui se déduit de la première par un simple changement de signe de ϵ .

Conclusion générale et perspectives.

Chapitre X

Conclusion générale

L'essentiel du travail effectué au cours de cette thèse est centré autour de l'étude, expérimentale et numérique, des mécanismes d'induction qui résultent de la distorsion d'un champ appliqué par des écoulements de métaux liquides. En imposant un champ extérieur aux écoulements de von Kármán dans le dispositif VKG, et en mesurant la moyenne temporelle du champ induit, nous avons observé la présence des effets d'induction connus pour favoriser l'instabilité dynamo tels que l'effet Ω , qui est lié à la rotation différentielle, l'effet Parker, dont l'origine se trouve dans le caractère hélicitaire de l'écoulement, ou encore les effets d'étirement et de compression qui sont caractéristiques de la structure en col de l'écoulement moyen s_2t_2 au voisinage du point de stagnation. Dans ce régime quasi-linéaire, les effets d'induction se comparent quantitativement aux résultats de la simulation numérique itérative qui n'utilise que la moyenne temporelle de l'écoulement. Cependant, pour prédire correctement la géométrie du champ induit, il est crucial de prendre en compte les conditions aux limites réelles qui prévalent à l'interface fluide/milieu extérieur. Lors des études menées dans le tore, nous avons pu constater la robustesse de la description des mesures en terme d'effets d'induction déjà identifiés dans VKG. En faisant l'hypothèse d'une décroissance lente devant le temps de diffusion du système, nous avons pu interpréter les différents effets d'induction en utilisant les propriétés de parité des composantes de l'écoulement lors d'un renversement de la fréquence de rotation, ou encore lors d'un changement de diverters. L'utilisation des propriétés de parité des effets d'induction s'est révélée particulièrement efficace lors de l'étude numérique des écoulements structurés en colonnes. Elle nous a permis d'interpréter simplement la structure du champ induit à l'aide des mécanismes élémentaires mis en évidence dans VKG, mais aussi de comprendre ce qu'apporte une séparation d'échelle dans un écoulement organisé à petite échelle.

Au cours des études expérimentales, nous avons pu constater que le caractère turbulent de l'écoulement de von Kármán contrarotatif se reflète dans la dynamique temporelle complexe du champ magnétique induit. Celui-ci possède de l'énergie sur un large domaine de fréquences s'étendant des grandes fréquences ($f \sim 50\Omega$), qui correspondent aux rapides distorsions des lignes de champ magnétique par les mouvements à petites échelles, jusqu'aux basses fréquences $f \sim \Omega/100$, qui sont associées à la dynamique lente de l'écoulement.

Dans les deux dispositifs expérimentaux qui utilisent le gallium, nous avons étudié la possibilité d'une contribution cohérente des mouvements à petite échelle. Cherchant à mesurer une contribution dominée par les effets d'induction de l'écoulement moyen, nous avons utilisé les dispositifs expérimentaux à leur limite de résolution. Il ressort des deux

études menées à la fois dans les écoulements de von Kármán, et dans l'écoulement du tore, que les effets d'induction des petites échelles sont inférieurs en amplitude à $1/10000^e$ du champ appliqué. Si un mécanisme coopératif des fluctuations turbulentes existe pour $P_m \ll 1$ et $R_m \sim 1 - 10$, alors il est inefficace en regard des effets d'induction dus à la structure moyenne de l'écoulement et ne peut prétendre influencer sur l'obtention de l'effet dynamo dans une expérience de laboratoire.

Pour la première fois dans l'expérience VKG, nous avons mis en évidence la présence d'une loi de puissance du type f^γ dans le domaine des basses fréquences. Toutefois, contrairement aux résultats de l'expérience VKS1, nous trouvons que l'exposant est différent de -1 . Il dépend de la direction du champ appliqué, et est deux fois plus grand en champ transverse qu'en champ axial appliqué. L'origine de cette anisotropie se trouve dans l'anisotropie des fluctuations de l'écoulement à grande échelle. Celle-ci sont fortement énergétiques et provoquent des variations lentes du champ induit sur des temps très supérieurs au temps de diffusion magnétique.

Avec le nouvel outil que constitue la sonde multiple, nous avons mesuré les fluctuations des profils de champ induit dans le dispositif VKG. Nous avons rapidement constaté la limite que constitue les mesures locales et indépendantes de champ magnétique dans un écoulement dont la taille correspond à la longueur de diffusion. Nous avons alors abandonné la vision locale pour définir des quantités géométriques représentatives des effets de la rotation différentielle et du point de stagnation. En étudiant les fluctuations de ces quantités, nous avons alors obtenu des résultats inédits concernant le comportement de l'écoulement de von Kármán contrarotatif :

- * Dans la gamme des fréquences intermédiaires ($f \sim \Omega$), alors que les effets du pompage présentent toujours un taux de fluctuation inférieur à 50%, le taux de fluctuation associé aux effets de la rotation différentielle est toujours supérieur à 100%.
- * Comme l'ont montré les études des corrélations entre les coefficients des ajustements polynomiaux, les fluctuations considérées sont associées à une perte globale de la configuration de von Kármán. Nous avons en outre pu estimer que l'écoulement contrarotatif ne passe que 50% du temps dans une configuration voisine de sa structure moyenne.
- * Dans le domaine des basses fréquences, le champ magnétique présente d'intenses fluctuations associées à la forme bimodale des PDF observées en champ transverse. Nous avons relié ce comportement bistable à une dynamique déterministe de la couche de mélange au voisinage du plan médian.

Alors que la présence de turbulence à petite échelle semble n'avoir aucune incidence sur la possibilité (ou non) d'effet dynamo dans une expérience de dynamo fluide, la conclusion est tout autre dans le cas de l'instationnarité de l'écoulement à grande échelle. En effet, comment imaginer que ces fluctuations, qui sont aussi énergétiques que l'écoulement moyen, et dont le temps caractéristique est de l'ordre du temps de diffusion des expériences en sodium, n'ont aucune influence sur le seuil de l'instabilité ?

L'expérience VKS2 a fonctionné pour la première fois au mois d'avril 2005, mais n'a pu livrer que des résultats préliminaires avant qu'un incident ne survienne. Dans la configuration optimisée à l'aide du code de dynamo cinématique, et malgré une réserve de puissance supplémentaire qui nous a permis d'atteindre des fréquences de rotation situées au-delà du seuil numériquement prévu, nous n'avons pas observé la dynamo. Toutefois,

nous avons observé le bouclage positif d'un champ induit plus grand en module que le champ appliqué. Contrairement aux mesures effectuées dans le gallium, nous n'avons pas été en mesure d'expliquer l'évolution linéaire de la moyenne temporelle du champ induit en fonction de la vitesse de rotation. Ceci pourrait être lié soit à la présence de la chemise en cuivre, qui n'a pas été prise en compte dans nos simulations, ou encore à la présence des intenses fluctuations de champ induit, qui montrent des PDF non gaussiennes, signe d'une dynamique intermittente qui semble spécifique du régime MHD de grand R_m de l'expérience VKS2.

Perspectives : l'ensemble de ces observations soulève des questions qui sont de plusieurs ordres :

- faut-il stabiliser l'écoulement à grande échelle pour obtenir l'instabilité dynamo dans VKS2? Une possibilité, qui est basée sur une étude de F. Ravelet, réside dans l'ajout d'un anneau de paroi dans le plan médian. Que ce nouvel écoulement soit un écoulement dynamo ou pas, nous pourrions alors disposer d'un écoulement plus calme, et pourrions comparer le résultat des simulations numériques à l'évolution de l'induction moyenne mesurée en fonction de R_m . Cette solution a été retenue pour la prochaine campagne de mesures utilisant la chemise en cuivre.
- Faut-il prendre en compte la présence de la chemise en cuivre pour comprendre l'évolution linéaire de la moyenne du champ induit en fonction de R_m ? La simulation itérative permet aussi de résoudre un problème stationnaire dans le cas d'un champ de conductivité variable. Il est donc possible de mettre en œuvre la simulation itérative avec l'écoulement de VKS2 en simulant la présence de la chemise en cuivre. Nous pourrions alors obtenir l'évolution du champ induit en fonction de R_m en utilisant des conditions aux limites plus réalistes. Ce travail est en cours de réalisation, et permettra sans doute de valider (ou d'infirmer) la capacité du code dynamo actuel à prédire le seuil réel dans le dispositif VKS2.
- La dynamique non gaussienne observée est-elle due au régime MHD spécifique à VKS2 (grand R_m , grand temps de diffusion), ou est elle d'origine hydrodynamique? De nouvelles mesures en champ localisé dans le dispositif VKG devraient apporter un élément de réponse. Par ailleurs, nous avons développé une sonde multiple permettant, dans le sodium, de mesurer les trois composantes du champ induit en dix points répartis le long d'un rayon. Elle a livré ses premiers résultats au mois de juillet, et ceux-ci sont en cours d'analyse. Leur comparaison aux résultats obtenus dans le gallium permettra d'étudier plus en détail les différences fondamentales qui existent entre induction à bas et à haut R_m .
- Par ailleurs, des mesures préliminaires concernant l'effet β de la turbulence, qui utilisent la réponse de l'écoulement à un champ oscillant, ont été obtenues dans le gallium. Elles seront poursuivies dans le sodium. Puisque cet effet doit être présent même en turbulence homogène et isotrope, ces mesures devraient permettre de conclure de manière définitive quant à la présence d'effets des mouvements à petite échelle.

Bibliographie

- [1] A. ALEMANY, R. MOREAU, L. SULEM, U. FRISCH, Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence, *J. Mécanique* **18**, 278 (1979).
- [2] J. AUBERT, D. BRITO, H.-C. NATAF, P. CARDIN, J.-P. MASSON, A systematic experimental study of rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **128**, 51–74 (2001).
- [3] J. AUBERT, N. GILET AND P. CARDIN, Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells. *G-Cubed*, 4(7) :1052, 2003.
- [4] Aubert and Wicht, Axial vs. equatorial dipolar dynamo models with implications for planetary magnetic fields, *Earth and Planetary Science Letters*, **221**, 409–419 (2004)
- [5] J. AUBERT, Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre, Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier, Grenoble 1 (2001)
- [6] J. AUBERT, S. JUNG, H. L. SWINNEY, Observations of zonal flow created by potential vorticity mixing in a rotating fluid, *Geophysical Research Letters*, **29**, 1876 (2002).
- [7] R. AVALOS, F. PLUNIAN AND K.-H. RÄDLER, Mean electromotive force generated by a ring of helical vortices. Part 1-Case of a z-independent flow, à soumettre, (2005).
- [8] R. AVALOS, F. PLUNIAN AND K.-H. RÄDLER, Mean electromotive force generated by a ring of helical vortices. Part 2-Case of a z-dependent flow, à soumettre, (2005).
- [9] R. AVALOS, F. PLUNIAN, A. GAILITIS, Influence of boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments, *Phys. Rev. E* **68**, (2003).
- [10] G.A. BAKER, Application of the Padé approximants method to the investigation of some magnetic properties of the Ising model, *Phys. Rev.* **124**, 768–774 (1961).
- [11] G. K. BATCHELOR, The Theory of Homogeneous Turbulence, *Cambridge University Press*, Cambridge (1982).
- [12] R. A. BAYLISS, C. B. FOREST, Magnetic field generation and saturation in a mechanically forced spherical dynamo, soumis à *Phys. Rev. Lett.*, novembre 2004.
- [13] M. BOURGOIN, études en magnétohydrodynamique, application à l’effet dynamo, Thèse de Doctorat, ENS Lyon, (2003).
- [14] M. BOURGOIN, R. VOLK, P. FRICK, S. KRIPCHENKO, P. ODIER, J.-F. PINTON, Induction mechanisms in von Kármán swirling flows of liquid gallium, *Magnetohydrodynamics* **1**, 13–31 (2004).
- [15] M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, Y. RICARD, An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics, *Phys. Fluids* **16**, 2529–2547 (2004).
- [16] M. BOURGOIN ET AL., MHD measurements in the von Kármán sodium experiment, *Phys. Fluids* **14**, 3046–3058 (2002).

- [17] A. BRISSEAU, U. FRISCH, J. LÉORAT, M. LESIEUR AND A. MAZURE, Helicity cascade in fully developed turbulence, *Phys. Fluids* **16**, 1366 (1973).
- [18] D. BRITO, Approches expérimentales et théoriques de la dynamique du noyau terrestre, Thèse de doctorat, ENS Paris, 1998.
- [19] D. BRITO, P. CARDIN, H.-C. NATAF, G. MAROLLEAU, Experimental study of a geostrophic of gallium in a transverse magnetic field, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **91**, 77-98 (1995).
- [20] E. BULLARD, The stability of a homopolar dynamo, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**, 744-760 (1955).
- [21] E. BULLARD, H. GELLMAN Homogeneous dynamo and terrestrial magnetism, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A247**, 213 (1954).
- [22] J. BURGUETE, L. MARIÉ, F. DAVIAUD, J. LÉORAT, Homogeneous dynamo : numerical analysis of experimental von Kármán type flows, *Eur. Phys. J. B* **33**, 469 (2003).
- [23] F.H. BUSSE, Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.* **44**, 441-460 (1970).
- [24] C.R. CARRIGAN, F.H. BUSSE, An experimental investigation of the onset of convection in rotating spherical shells, *J. Fluid Mech.* **126**, 287-305 (1983).
- [25] U. CHRISTENSEN, A. TILGNER, Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos, *Nature* **429**, 169-171 (2004).
- [26] O. CADOT, S. DOUADY, Y. COUDER, Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow, *Phys. Fluids A* **7**, 630 (1995).
- [27] P. CARDIN, D. BRITO, D. JAULT, H.-C. NATAF, J.-P. MASSON, Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment, *Magnetohydrodynamics* **38**, 177-189 (2002).
- [28] Q. CHEN, S. CHEN, G.L. EYINK, The joint cascade of energy and helicity in three-dimensional turbulence, *Phys. Fluids* **15**, 361 (2003).
- [29] U. CHRISTENSEN, P. OLSON, G. A. GLATZMAIER, Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study, *Geophys. J. Int.* **138**, 393 (1999).
- [30] S.A. COLGATE, V. PARIEV, H.F. BECKLEY, R. FERREL, V.D. ROMERO, J.C. WEATHERALL, The New Mexico α/Ω Dynamo Experiment : Modeling Astrophysical Dynamos, *Magnetohydrodynamics* **38**, 122-135 (2002).
- [31] W. DOBLER, P. FRICK, R. STEPANOV, Screw dynamo in a time-dependent pipe flow, *Phys. Rev. E* **67**, 056309 (2003)
- [32] E. DORMY, P. CARDIN, AND D. JAULT, MHD flow in a slightly differentially rotating shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **160**, 15 (98).
- [33] S. DOUADY, Y. COUDER, M.-E. BRACHET, Direct observation of intense vorticity filaments in turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 983 (1991).
- [34] N.L. DUDLEY, R.W. JAMES, Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A425**, 407 (1989).

- [35] S. FAUVE, C. LAROCHE, A. LIBCHABER, Effect of a horizontal magnetic field on convective instabilities in mercury, *J. Phys. Lettres* **42**, L-455 (1981). S. FAUVE, C. LAROCHE, A. LIBCHABER, Horizontal magnetic field and the oscillatory instability onset, *J. Phys. Lettres* **45**, L-101 (1984).
- [36] S. FAUVE, C. LAROCHE, B. CASTAING, Pressure fluctuations in swirling turbulent flows, *J. Phys. II* **3**, 271 (1993).
- [37] L. FIGUIER, Les merveilles de la science, ou description populaire des inventions modernes, *Furne, Jouvot & Cie* **TI**, (1898).
- [38] C. B. FOREST, R. A. BAYLISS, R. D. KENDRICK, M. D. NORNBERG, R. O'CONNELL, E. J. SPENCE, Hydrodynamic and numerical modeling of a spherical homogeneous dynamo experiment, *Magnetohydrodynamics* **38**, 107–120 (2002).
- [39] R.A. BAYLISS, C.B. FOREST, AND P. TERRY, Magnetic field generation and saturation in a mechanically forced spherical dynamo, *Submitted to Phys. Rev. Lett.* (2004).
- [40] P. FRICK, V. NOSKOV, S. DENISOV, S. KHRIPCHENKO, D. SOKOLOFF, R. STEPANOV, A. SUKHANOVSKY, Non-stationary screw flow in a toroidal channel : way to a laboratory dynamo experiment, *Magnetohydrodynamics* **38**, 143–162 (2002)
- [41] U. FRISH., Turbulence, *Cambridge University Press*, 1995.
- [42] A. GAILITIS ET AL. Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365–4368 (2000).
- [43] A. GAILITIS, O. LIELAUSIS, S. DEMENT'EV, E. PLACATIS, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN, H. HÄNEL, G. WILL, Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024 (2001).
- [44] A. GAILITIS, O. LIELAUSIS, S. DEMENT'EV, E. PLACATIS, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN, H. HÄNEL, G. WILL, Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment, *Survey in Geophysics* **24**, 247–267 (2003).
- [45] A. GILBERT, Dynamo theory, *Elsevier science*, (2004)
- [46] N. GILET, Magnétoconvection dans une sphère en rotation rapide : approches numérique et expérimentale de la convection dans les noyaux planétaires, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, (2004)
- [47] G.A. GLATZMAIER, P.H. ROBERTS, A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic reversal, *Nature* **377**, 203–208 (1995).
- [48] A. HENSHAW A Solver for steady state boundary value problems on overlapping grids, URL : <http://www.llnl.gov/casc/Overture>, Center for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA, 94551, (2002).
- [49] A. HERZENBERG, F.J. LOWES Electromagnetic induction in rotating conductors, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A249**, 507–584 (1957).
- [50] F. KRAUSE AND K.-H. RÄDLER, Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory, *Akademie-Verlag Berlin*, Berlin (1980).
- [51] A. LANOTTE, A. NOULLEZ, M. VERGASSOLA, A. WIRTH, Large scale dynamo by negative eddy diffusivities, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **91**, 131–146 (1999).

- [52] J. LARMOR, How could a rotating body such as the sun become a magnet? , *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, **159** (1919).
- [53] B. LEHNERT, An experiment on axisymmetric flow of liquid sodium in a magnetic field, *Arkiv für Physik* **13**, 109 (1957).
- [54] J. LÉORAT, *Prog. Ser. Am. Inst. Astronautics and Aeronautics* **162**, 282 (1994).
- [55] N. LEPROVOST, B. DUBRULLE, Dynamo threshold in a turbulent medium, soumis à *Phys. Rev. Lett.* (2004) <http://fr.arxiv.org/astro-ph/0404108>
- [56] F.J. LOWES, I. WILKINSON, Geomagnetic Dynamo : a Laboratory model, *Nature* **198**, 1158 (1963).
- [57] F.J. LOWES, I. WILKINSON, Geomagnetic Dynamo : an improved Laboratory model, *Nature* **219**, 717 (1968).
- [58] L. MARIÉ, F. PÉTRÉLIS, M. BOURGOIN, J. BURGUETE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, S. FAUVE, P. ODIER, J.-F. PINTON, Open questions about homogeneous fluid dynamo : the VKS experiment, *Magnetohydrodynamics* **38**, 163–176 (2002).
- [59] L. MARIÉ, J. BURGUETE, F. DAVIAUD, J. LEORAT, Numérique study of homogeneous dynamo based on experimental von Kármán type flows, *Eur. Phys. J. B.* **18**, 469 (2003).
- [60] LOUIS MARIÉ, Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7*, (2003).
- [61] A. MARTIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, S. FAUVE, Magnetic permeability of a di-phasic flow, made of liquid gallium and iron beads, *Eur. Phys. J. B* **18**, 337–341 (2000).
- [62] J. MAURER, P. TABELING, G. ZOCCHI, *Eur. Lett.* **26**, 31 (1994).
- [63] H.K. MOFFATT, The amplification of a weak applied magnetic field by turbulence in fluids of moderate conductivity, *J. Fluid Mech.* **11**, 625–635 (1961).
- [64] H.K. MOFFATT, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids, *Cambridge University Press*, Cambridge (1978).
- [65] N. MORDANT, J.-F. PINTON, F. CHILLÀ, Characterization of turbulence in a closed flow, *J. Phys. II* **7**, 1 (1997).
- [66] U. MÜLLER, R. STIEGLITZ, S. HORANY, A two-scale hydromagnetic dynamo experiment, *J. Fluid Mech.* **498**, 31–71 (2004).
- [67] H.-C. NATAF, Earth's core and lower mantle, Editors C. A. Jones., A. M. Soward and K. Zhang in *The fluid mechanics of astrophysics and geophysics*, Taylor & Francis, London (2003)
- [68] H.-C. NATAF ET J. SOMMERIA , La physique et la Terre, *Éditions Belin, CNRS éditions*, Paris (2000).
- [69] C. NORE, M.-E. BRACHET, H. POLITANO, A. POUQUET, Dynamo action in the Taylor-Green vortex near threshold, *Phys. Plasmas* **4**, 1 (1997).
- [70] C. NORMAND, Ponomarenko dynamo with time periodic flow, *Physics of fluids* **15**, issue 6, 1606–1611 (2004).

- [71] V. NOSKOV, S. DENISOV, P. FRICK, S. KHRIPCHENKO, D. SOKOLOFF, R. STEPANOV, Magnetic field rotation in the screw gallium flow, *Eur. Phys. J. B* **41**, 561–568 (2004).
- [72] P. ODIER, J.-F. PINTON, S. FAUVE, Magnetic induction by a coherent vortex motion, *Eur. Phys. J. B* **16**, 373–378 (2000).
- [73] P. ODIER, J.-F. PINTON, S. FAUVE, Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow, *Phys. Rev. E* **58**, 7397–7401 (1998).
- [74] E. N. PARKER, Hydromagnetic dynamo models, *Astrophysical J.* **122**, 293–314 (1955).
- [75] E. N. PARKER, Cosmical magnetic fields : their origin and their activity, *Oxford :Clarendon.*, (1979).
- [76] N.L. PEFFLEY, A.B. CAWTHORNE, D.P. LATHROP, Toward a self-generating magnetic dynamo : The role of turbulence, *Phys. Rev. E* **61**, 5287 (2000).
- [77] F. PÉTRÉLIS, S.FAUVE, Saturation of the magnetic field above the dynamo threshold, *Eur. Phys. J. B* **22**, 273–276 (2001).
- [78] F. PÉTRÉLIS, Effet dynamo : étude des mécanismes d’instabilité et de saturation du champ magnétique, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, (2002).
- [79] F. PÉTRÉLIS, L. MARIÉ, M. BOURGOIN, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, S. FAUVE, P. ODIER, J.-F. PINTON, Non linear magnetic induction by helical motion in a liquid sodium turbulent flow, *Phys. Rev. Lett.* **90**, number 17 (2003).
- [80] J.-F. PINTON, R. LABBÉ, Correction to Taylor hypothesis in swirling flows, *J. Phys. II (France)* **4**, 1461 (1994).
- [81] YU. B. PONOMARENKO, Theory of the hydromagnetic generator, *J. Applied Mech. Tech. Phys.* **14**, 775 (1973).
- [82] Y. PONTY, H. POLITANO, J.F. PINTON, Simulation of induction at low magnetic Prandtl number, *Phys. Rev. Lett.* **92**, number 14 (2004)
- [83] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY, Numerical recipes, *Cambridge University Press*, Cambridge (1988).
- [84] K.-H. RÄDLER, *et al*, On the mean-field theory of the Karlsruhe experiment, I Kinematic theory *Magnetohydrodynamics* **38**, (2002).
- [85] F. RAVELET, étude expérimentale de l’écoulement tourbillonnaire de von Kármán et application à l’effet dynamo, rapport de stage de DEA, CEA Saclay (2002).
- [86] F. RAVELET, L. MARIÉ, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : experimental evidence for a global bifurcation, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 164501 (2004).
- [87] F. RAVELET, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, J. LÉORAT, Towards a von Kármán dynamo : numerical studies based on experimental flows, soumis à *Phys. Fluids* (octobre 2004). <http://fr.arxiv.org/physics:0411213>
- [88] G.O. ROBERTS, Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **271**, 411–454 (1972).
- [89] P.H. ROBERTS, A.M. SOWARD, *Annual review of fluid dynamics* **24**, 459–512 (1992).
- [90] N. SCHAEFFER AND P. CARDIN, Quasi-geostrophic kinematic dynamos, soumis à *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, (2004).

- [91] N. SCHAEFFER AND P. CARDIN, Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewarson layer, sub Journal of fluid mechanics, (2004).
- [92] A.A. SCHEKOCHIHIN, N.E.L. HAUGEN, A. BRANDENBURG, S.C. COWLEY, J.L. MARON AND J.C. MCWILLIAMS, Onset of small-scale turbulent dynamo at low magnetic prantl numbers, submitted to APJL, (2004).
- [93] W.L. SHEW, D.R. SISAN, D.P. LATHROP, Hunting for dynamos : eight different liquid sodium flows, *In Dynamo and Dynamics, A Mathematical Challenge*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Cargèse (France), August 21-26, 2000. NATO Science series II, Vol. 26, P. Chossat, D. Armbruster and I. Oprea eds. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2001).
- [94] BECK, A. BRANDENBURG, D. MOSS, A. SHUKUROV, D. SOKOLOFF, Galactic magnetism : recent developments and perspectives, *Annual review of astronomy and astrophysics* **34**,155-206 (1996).
- [95] C. SIMAND, étude de la turbulence inhomogène au voisinage d'un vortex intense, Thèse de Doctorat, ENS Lyon, (2002).
- [96] D. R. SISAN, W. L. SHEW, D. P. LATHROP, Lorentz force effects in magnetoturbulence, *Physics of Earth and Planetary Interiors* **135**, 137-159 (2003).
- [97] D. R. SISAN, N. MUJICA, W. A. TILLOTSON, Y. HUANG, W. DORLAND, A. HASSAM, T. ANTONSEN AND D. P. LATHROP, Experimental observation and characterization of the magnetorotational instability,*arXiv :physics/0402125 v2 29 Jun 2004*.
- [98] J. SIVARDIÈRE, La symétrie en mathématique, physique et chimie, *Presses Universitaires de Grenoble* (1995).
- [99] J. SOMMERIA, R. MOREAU. Why, how and when MHD turbulence becomes two-dimensional, *J. Fluid Mech.* **118**, 507–518 (1982).
- [100] M. STEENBECK, I.M. KIRKO, A. GAILITIS, A.P. KLAWINA, F KRAUSE, I.J. LAUMINIS ET O.A. LIELAUSIS, An experimental verification of the alpha effect, *Monats. Dt. Akad. Wiss.* **9**, 776 (1967).
- [101] R. STIEGLITZ, U. MÜLLER, Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo, *Phys. Fluids* **13**, 561–564 (2001).
- [102] R. STIEGLITZ, U. MÜLLER Can the Earth's magnetic field be simulated in the laboratory? *Naturwissenschaften* **87**, 381 (2000).
- [103] D. SWEET, E. OTT, J.M. FINN, T.M. ANTONSEN JR., D.P. LATHROP, Blowout bifurcations and the onset of magnetic activity in turbulent dynamos, *Phys. Rev. E* **63**, 066211 (2001). D. SWEET, E. OTT, T.M. ANTONSEN JR., D.P. LATHROP, J.M. FINN, Blowout bifurcations and the onset of magnetic dynamo action, *Phys. Plasmas* **8**, 1944 (2001).
- [104] J.B. TAYLOR, The magnetohydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A274**, 274–283 (1963).
- [105] J.-P. VALET, L. MEYNADIER, Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years, *Nature* **366**, 234–238 (1993).
- [106] N.O. WEISS, The expulsion of magnetic flux by eddies, *Proc. Roy. Soc.* **A293**, 310 (1966).

-
- [107] P.J. ZANDBERGEN, D. DIJKSTRA, von Kármán swirling flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 465 (1987).

Fluctuations d'induction en magnétohydrodynamique, contributions à l'induction à grande échelle, application à l'effet dynamo

Résumé : au cours de cette thèse, nous avons étudié les mécanismes d'induction à l'origine de l'instabilité dynamo dans des écoulements de métaux liquides à grand nombre de Reynolds magnétique (R_m). Les écoulements considérés sont pleinement turbulents et présentent des fluctuations sur une large gamme d'échelles spatio-temporelles. En mesurant le champ induit lorsqu'un champ extérieur est appliqué à un écoulement de gallium liquide ($R_m < 5$) ou de sodium liquide ($R_m < 50$), nous nous sommes intéressés aux questions suivantes :

- **Existe-t-il un effet coopératif des petites échelles de la turbulence pouvant contribuer au champ induit à grande échelle ?** Si les résultats de la théorie de champ moyen suggèrent la possibilité d'un effet coopératif pouvant induire un champ magnétique à grande échelle, les mesures effectuées dans les expériences du tore de Perm, et VKG de Lyon, montrent que la contribution des petites échelles est négligeable devant celle des grandes échelles de l'écoulement.

- **Comment décrire les effets d'induction produits par les mouvements à grande échelle ?** En mesurant, à bas R_m ($R_m < 5$), les profils de champ induit le long d'un rayon dans l'expérience VKG, nous montrons que l'écoulement de von Kármán contrarotatif présente un comportement turbulent à grande échelle. L'écoulement passe 50% du temps dans des configurations très éloignées de sa structure moyenne, ce qui provoque de larges fluctuations des mécanismes d'induction, et peut les rendre inefficaces pendant des durées supérieures au temps de diffusion magnétique.

- **Ces résultats ont-ils un impact sur la réalisation des dynamos expérimentales ?** Les résultats expérimentaux obtenus, tant dans le gallium que dans le sodium, suggèrent que le caractère turbulent de l'écoulement ne peut avoir qu'un impact faible sur le seuil de l'instabilité alors les fluctuations aux grandes échelles de l'écoulement peuvent remettre en question l'analyse cinématique basées sur le seul écoulement moyen.

Dans une seconde partie de la thèse, nous explorons numériquement les mécanismes d'induction dans un écoulement constitué d'un ensemble de colonnes hélicitaires organisées le long d'un anneau. Pour un tel écoulement qui reproduit la structure des colonnes de Busse de la convection thermique dans le noyau terrestre, nous montrons, à l'aide d'une technique itérative, que des modes dipolaires et quadrupolaires peuvent être entretenus. Le quadrupôle semble toujours favorisé par rapport au dipôle et le bouclage du cycle dynamo se fait entre les composantes radiale et toroïdale du champ magnétique. Les résultats obtenus pour ce système simple soulignent le lien étroit existant entre la géométrie de l'expérience dynamo de Karlsruhe et le problème de la génération du champ magnétique terrestre dans le modèle de convection de Busse.

Mots clefs : Magnétohydrodynamique, induction, dynamo, turbulence, structures cohérentes.

Fluctuations of magnetic induction, contributions to the large scale induction, application to dynamo effect

Summary : in this work we investigate the induction mechanisms which are at the origin of the dynamo effect in liquid metal flows at high magnetic Reynolds number (R_m). The flows are fully turbulent and exhibit fluctuations on a large range of scales. Measuring the induced magnetic field in gallium ($R_m < 5$) and sodium ($R_m < 50$) flows, we considered the following points :

- **Do small scale fluctuations play any role in the dynamics of the large scale magnetic field ?** Although mean field theory predicts, in the case of scale separation, that turbulent fluctuations can produce a large scale magnetic field. The measurements performed in two different types of gallium flows show that the small scales contribution is negligible as compared to the mean flow contribution.

- **How to describe the large scale movements contribution ?** Measuring magnetic induction profiles in the VKG experiment, we show that the von Kármán flow presents large scales turbulent fluctuations. We find that 50% of the time, the flow is away from its average structure, which causes intense fluctuations of induction mechanisms.

- **Do these results have an influence on the realization of a dynamo experiment ?** These results suggest that the small scale turbulence will not modify the instability threshold while, in case of unconstrained flows, the predictions based on the topology of the mean flow may be wrong due to the large scale fluctuations.

In a second part, we investigate numerically induction mechanisms in the case of an assembly of helical vortices organized on a ring. For such a flow that mimics Busse's columns of rotating convection, we find that both dipoles and quadrupoles can be sustained. The results obtained with this simple flow underline the strong link between the geometry of the Karlsruhe flow and the problem of the earth magnetic field generation in Busse's model of rotating convection.

Keywords : Magnetohydrodynamics, induction, dynamo, turbulence, coherent structures.
